POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: gimnazjalny

1/8 FINAŁU

1. Wiemy, że jedno z ramion wagi szalkowej jest dwa razy dłuższe (zatem ciężar umieszczony na szalce przy dłuższym ramieniu równoważy podwójny ciężar umieszczony na szalce przy krótszym). Czy można na niej odważyć ciężar 2018 kg, jeżeli mamy do dyspozycji po dwa odważniki o ciężarach będących potęgami trójki (tzn. $1, 3, 9, 27, \ldots$ kg)?

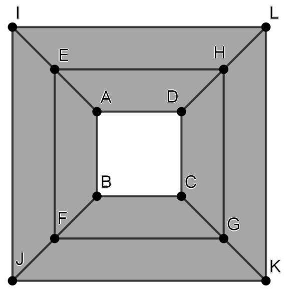
2. Przez jeden z wierzchołków prostokąta o bokach długości 9 cm i 12 cm poprowadzono dwie proste dzielące ten prostokąt na trzy figury o równych polach. W jakim stosunku proste te dzielą boki prostokąta?

3. Uzasadnij, że liczba $9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8 + 9^9 + 9^{10}$ jest podzielna przez 90.

4. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $3n$ ma 2018 cyfr. Jaka jest cyfra jedności liczby n?

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym boki AB i AC są równej długości. Trójkąt ABC przecięto prostą przechodzącą przez wierzchołek A tak, że powstały dwa trójkąty równoramienne. Jakie kąty ma trójkąt ABC?

6. Pomiędzy wioskami Zabłotna Dolna i Zabłotna Górna kursuje autobus, a ponieważ droga prowadzi przez wzgórza i kierowca stara się utrzymywać prędkość 30 km/h, jadąc pod górkę, oraz 60 km/h, jadąc z górki, to jazda z Zabłotnej Dolnej do Zabłotnej Górnej trwa 39 minut a z powrotem – tylko 15 minut. Jaka jest długość drogi pomiędzy tymi wioskami, jeśli na całej drodze nie ma ani jednego kawałka trasy, który by nie był z górki albo pod górkę?



7. Na rysunku przedstawiono widok z góry pewnej bryły (ściany tej bryły są zacieniowane, oczywiście niewidoczna w tym rzucie "podłoga" również jest ścianą tej bryły). Widać tu kwadraty $ABCD$, $EFGH$ oraz $IJKL$, których długości boków wynoszą, odpowiednio 1, 2 oraz 3. Kwadraty $ABCD$ oraz $IJKL$ leżą na jednej płaszczyźnie, zaś kwadrat $EFGH$ leży na płaszczyźnie równoległej do niej. Odległość między tymi płaszczyznami wynosi 1. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

8. Trzech robotników wykonało pewną pracę w ciągu 4 dni. Pierwszy z nich mógłby wykonać cała pracę sam w ciągu 10 dni. Drugi z nich na samodzielne wykonanie tej pracy zużyłby 12 dni. W ciągu ilu dni wykonałby tę pracę, samodzielnie, trzeci robotnik?

9. Która z liczb jest większa: $3^{600} - 5^{400}$ czy $3^{300} + 5^{200}$?

10. Mamy dwa naczynia: w naczyniu A znajdują się 4 kg 10-procentowego roztworu cukru w wodzie (stężenia liczymy wagowo), zaś w naczyniu B – 3 kg wody. Z naczynia A przelano do naczynia B 1 kg roztworu. Po dokładnym wymieszaniu z tak otrzymanego roztworu odlano 1 kg do naczynia A. Jakie są stężenia otrzymanych w obu naczyniach roztworów?

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: gimnazjum

1/8 FINAŁU – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Możemy. Na szalce przy dłuższym ramieniu kładziemy odważniki: 729, 243, 27, 9 oraz 1 kg. W sumie ważą one 1009 kg, zatem zrównoważą ciężar na szalce przy krótszym ramieniu, równy 2018 kg.

2. Oznaczmy wierzchołek, przez który poprowadzono proste, przez A, a cały prostokąt przez $ABCD$, przy czym możemy przyjąć, że $AB = 12$ cm, zaś $AD = 9$ cm. Nie może być tak, że zawarte w prostokącie odcinki dzielących prostych, leżą po tej samej stronie przekątnej AC, gdyż wtedy jedna z figur miałaby pole większe od połowy pola prostokąta. Zatem jeden z tych odcinków przecina bok DC – nazwijmy go AM, zaś drugi przecina bok BC – nazwijmy go AN. Trójkąt prostokątny ABN ma pole równe jednej trzeciej pola prostokąta, czyli $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot BN = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 9$, co daje $BN = 6$ cm. W takim razie punkt N dzieli bok BC w stosunku $BN : NC = 2 : 1$. Rozumując analogicznie, otrzymujemy, że punkt M dzieli odcinek CD w stosunku $CM : MD = 1 : 2$.

3. Ponieważ

   $$9^1+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6+9^7+9^8+9^9+9^{10} = 9(1+9^1+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6+9^7+9^8+9^9),$$

   to wystarczy pokazać, że liczba $1+9^1+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6+9^7+9^8+9^9$ dzieli się przez 10, tzn. że jej cyfrą jedności jest zero. Ale to wynika z faktu, że kolejne potęgi dziewiątki mają za cyfrę jedności na zmianę 9 i 1.

4. Jeśli liczbę $k = 333\ldots333$ złożoną z 2017 trójek pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę $3k = 999\ldots999$, złożoną z 2017 dziewiątek. W takim razie szukane n wynosi $k+1$, bo wówczas $3n = 3k+3 = 1000\ldots0002$ i zer w tym zapisie jest 2016. A skoro $n = k+1$, to ma cyfrę jedności równą 4.

5. Oznaczmy kąty trójkąta ABC symbolami α, β, β. Niech M będzie punktem na boku CB, który wyznaczony jest przez linię podziału trójkąta ABC. Zauważmy, że przynajmniej jeden z kątów $\angle AMB$ lub $\angle AMC$ musi mieć miarę co najmniej $90°$. Możemy założyć, że jest to kąt $\angle AMB$. Tym samym w trójkącie AMB równe muszą być katy przy wierzchołkach B oraz A.

   Kąty w trójkącie AMB wynoszą więc $\beta, \beta, 180° - 2\beta$, zatem w trójkącie drugim mamy kąty $2\beta, 2\beta, \beta$ lub $2\beta, \beta, \beta$, co daje $\beta = 36°$ lub $\beta = 45°$. Ostatecznie są dwie możliwe odpowiedzi: $36°, 36°, 108°$ lub $45°, 45°, 90°$.

6. Jeśli długość drogi pomiędzy wioskami oznaczymy przez x km, to autobus, jadąc tam i z powrotem, przejedzie dokładnie x km pod górkę i x kilometrów z górki. I zajmie mu to $39 + 15 = 54$ minuty, czyli $9/10$ godziny. W takim razie

   $$\frac{x}{30} + \frac{x}{60} = \frac{9}{10},$$

   co daje $x = 18$ km.

   Uwaga: tak wyglądało rozwiązanie podane w kluczu – dość sprytne, nieprawdaż? Tyle, że zadanie ma pewien, hmmm, feler... jeśli dokładnie policzymy ile kilometrów autobus jechał pod górkę jadąc z Zabłotnej Dolnej do Zabłotnej Górnej to okaże się, że droga pod górkę wynosiła 21 km zaś z górki -3 km. Zaiste – niezwykła to sytuacja! Problem polega na tym, że jadąc z dwukrotnie większą prędkością możemy skrócić czas podróży co najwyżej o połowę – ale nie z 39 minut do 15 minut!

7. Pole powierzchni tego wielościanu to suma pól: czterech trapezów o podstawach 1 i 3 oraz wysokości 1, czterech trapezów o podstawach 1 i 2 oraz wysokości $\frac{\sqrt{5}}{2}$ oraz czterech trapezów o podstawach 2 i 3 oraz wysokości $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Czyli razem $8 + 8\sqrt{5}$.

8. Załóżmy, że trzeci pracownik potrzebuje na wykonanie pracy x dni. Oznaczmy ilość pracy potrzebną do wykonania przez P. Pracownik pierwszy w ciągu dnia wykonuje $\frac{P}{10}$ całej pracy, pracownik drugi – $\frac{P}{12}$ całej pracy zaś pracownik trzeci – $\frac{P}{x}$. Pracując razem, w ciągu jednego dnia wykonają
$$\frac{P}{10} + \frac{P}{12} + \frac{P}{x}$$
całej pracy, zaś w ciągu 4 dni wykonana zostanie cała praca. Daje to równość
$$4 \cdot \left(\frac{P}{10} + \frac{P}{12} + \frac{P}{x}\right) = P,$$
a w konsekwencji
$$\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$
i $x = 15$.

9. Większa jest $3^{600} - 5^{400}$. Ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy bowiem
$$3^{600} - 5^{400} = \left(3^{300} - 5^{200}\right)\left(3^{300} + 5^{200}\right)$$
oraz możemy łatwo uzasadnić, że czynnik $(3^{300} - 5^{200})$ jest większy niż 1. Rzeczywiście, jest on dodatni, gdyż
$$3^{300} = (3^3)^{100} = 27^{100} > 25^{100} = 5^{200},$$
i nie może być równy 1, jako różnica dwóch liczb nieparzystych.

10. W naczyniu A było początkowo 0,4 kg cukru. Do naczynia B dostało się 0,1 kg cukru, więc stężenie roztworu wyniosło $2,5\%$ (i takie będzie na koniec). Drugie przelanie zawiera $1/4$ poprzedniej ilości cukru z naczynia B, czyli 0,025 kg, zatem ostatecznie w naczyniu A będzie $0,3 + 0,025$ kg cukru na 4 kg roztworu, co daje stężenie $8,125\%$.