POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: gimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. Jarek pokonuje trasę z miasta A do miasta B ze stałą prędkością. Gdyby zwiększył prędkość o 3 m/s, to przybyłby do B w czasie 3 razy krótszym. Ile razy krócej będzie jechał z A do B, jeżeli zwiększy prędkość o 6 m/s?

2. Odcinek poprowadzony z wierzchołka trapezu znajdującego się przy krótszej podstawie do dłuższej podstawy dzieli ten trapez na dwie figury, których pola są w stosunku 2:3. W jakim stosunku dzieli on podstawę trapezu, jeśli długość krótszej podstawy stanowi połowę dłuższej?

3. Marek wypisał wszystkie liczby z zakresu od 1 do 100, które mogą być liczbami krawędzi graniastosłupa prawidłowego. Darek zaś wypisał wszystkie liczby z zakresu od 1 do 100, które mogą być liczbami krawędzi ostrosłupa prawidłowego. Ile **różnych** liczb wypisali razem?

4. Sześcian o krawędzi długości 6 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez trzy jego wierzchołki i niezawierającą żadnej krawędzi. W ten sposób otrzymano dwie bryły: mniejszą i większą. Oblicz stosunek objętości większej bryły do objętości mniejszej.

5. Ile dzielników naturalnych ma liczba 2018^2?

6. Która z liczb jest większa i o ile: $2 \cdot 1112131415 \cdot 1112131416$ czy $1112131415^2 + 1112131416^2$?

7. W pewnej firmie przed redukcją zatrudnienia połowę stanowili pracownicy powyżej 50. roku życia, a 25% – pomiędzy 30. a 50. rokiem życia. Po redukcji liczba pracowników każdej z wymienionych grup zmniejszyła się o połowę, zaś w pozostałych grupach nie uległa zmianie. Jaki jest stosunek liczby pracowników przed redukcją do liczby pracowników po redukcji?

8. Obok podanych jest pięć warunków dla liczby całkowitej dodatniej a. Ile jest równe a, jeśli wiemy, że dokładnie trzy z podanych warunków są prawdziwe?

   (a) $3a + 5 > 40$

   (b) $49a \geqslant 301$

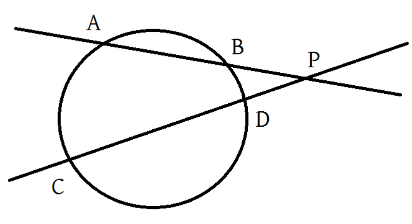
   (c) $20a \leqslant 999$

   (d) $101a + 53 \geqslant 2332$

   (e) $15a - 7 \geqslant 144$

9. Czy można znaleźć 51 różnych liczb dwucyfrowych takich, że wśród nich nie ma dwóch liczb sumujących się do 100?

10. Dwie proste przecinające okrąg o środku O przecinają się w punkcie P leżącym na zewnątrz okręgu. Oblicz miarę kąta APC, jeśli wiadomo, że kąt środkowy AOC ma miarę 60°, a kąt środkowy BOD ma miarę 30°.



UNIWERSYTET GDAŃSKI

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła gimnazjalna

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy początkową prędkość Jarka przez v, zaś czas potrzebny na pokonanie drogi przez t. Wówczas mamy równanie
$$\Big(v+3\Big)\frac{t}{3} = vt,$$
co oznacza, że $v = 3/2$.

   Oznaczmy czas potrzebny na przejechanie trasy przy prędkości zwiększonej o 6 m/s przez T. Wówczas
$$\Big(v+6\Big)T = vt,$$
co oznacza, że $T = \frac{1}{5}t$, czyli że Jarek zwiększając prędkość o 6 m/s będzie jechał 5 razy krócej.

2. Oznaczmy trapez przez $ABCD$, przy czym AB jest dłuższą podstawą, zaś CD – krótszą. Na podstawie AB wyznaczamy punkt E taki, że odcinek CE jest odcinkiem tworzącym podział wspomniany w treści zadania. Figura BEC jest trójkątem. Trójkąt ten ma tę samą wysokość co trapez – oznaczmy tę wysokość przez h. Wprowadźmy oznaczenia: $AB = 2b$, $BE = c$, $CD = b$. Wówczas pola figur BEC i $AECD$ wynoszą odpowiednio: $\frac{1}{2}ch$ oraz $\frac{1}{2}(2b-c+b)h = \frac{1}{2}(3b-c)h$. Mamy oczywiście dwa przypadki:
   - $\frac{1}{2}ch : \frac{1}{2}(3b-c)h = 2:3$, co daje $3c = 6b - 2c$, czyli $c = \frac{6}{5}b$. Zatem $(2b-c) : c = 2:3$.
   - $\frac{1}{2}(3b-c)h : \frac{1}{2}ch = 2:3$, co daje $9b - 3c = 2c$, czyli $c = \frac{9}{5}b$. Zatem $(2b-c) : c = 1:9$.

3. Liczba krawędzi graniastosłupa prawidłowego jest postaci $3n$, gdzie $n \geqslant 3$. W takim razie Marek wypisał liczby $9, 12, 15, \ldots, 99$, których jest 31. Natomiast liczba krawędzi ostrosłupa prawidłowego jest postaci $2n$, gdzie $n \geqslant 3$, zatem Darek wypisał liczby $6, 8, 10, \ldots, 100$, których jest 48. W sumie wypisali więc $31 + 48 = 79$ liczb, jednak niektóre z nich się powtarzały. Te powtarzające się liczby to liczby postaci $6n$, gdzie $n \geqslant 2$, czyli: $12, 18, \ldots, 96$. Jest ich dokładnie 15. Ostatecznie, Marek i Darek wypisali $79 - 15 = 64$ różne liczby.

4. Oznaczmy podstawę sześcianu przez $ABCD$, zaś ścianę do niej równoległą przez $A'B'C'D'$ (AA' jest krawędzią). Bez straty ogólności możemy założyć, że płaszczyzna tnąca przechodzi przez B, D oraz A'. W takim razie mniejsza z brył to ostrosłup $ABDA'$, którego objętość wynosi $\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$. Ponieważ objętość całego sześcianu jest równa 216, to objętość większej bryły wynosi $216 - 36 = 180$. Zatem poszukiwany stosunek jest równy $180 : 36$, czyli $5 : 1$.

5. Ponieważ $2018 = 2 \cdot 1009$ (należy uzasadnić, że 1009 jest liczbą pierwszą), więc $2018^2 = 2^2 \cdot 1009^2$. Stąd liczba dzielników jest równa $3 \cdot 3 = 9$.

6. Suma kwadratów jest większa o 1. Wystarczy skorzystać ze wzoru na kwadrat różnicy:
$$1112131415^2 + 1112131416^2 - 2 \cdot 1112131415 \cdot 1112131416 = (1112131415 - 1112131416)^2 = (-1)^2 = 1.$$

7. Niech n oznacza liczbę pracowników przed redukcją. Wiemy, że $0,5n$ pracowników miało ponad 50 lat, wiek $0,25n$ pracowników mieścił się pomiędzy 30 a 50 lat, zaś pozostałych $0,25n$ pracowników miało do 30 lat. Po redukcji zostało więc $\frac{1}{2} \cdot 0,5n + \frac{1}{2} \cdot 0,25n + 0,25n = 0,625n$. W takim razie szukany stosunek wynosi $n/0,625n$, czyli $8/5$.

8. Ponieważ a jest liczbą całkowitą, warunki dane w zadaniu są równoważne następującym:

   (a) $a \geqslant 12$
   (b) $a \geqslant 7$
   (c) $a \leqslant 49$
   (d) $a \geqslant 23$
   (e) $a \geqslant 11$

   Aby zobaczyć, dla jakiego a dokładnie 3 spośród tych warunków są prawdziwe, wystarczy przedstawić je na osi liczbowej. Otrzymujemy $a = 11$.

9. Nie można. Do uzasadnienia wykorzystamy zasadę szufladkową Dirichleta. Rozmieśćmy liczby dwucyfrowe od 10 do 90 w szufladkach w następujący sposób: $\{10, 90\}$, $\{11, 89\}$, $\{12, 88\}$, …, $\{49, 51\}$, $\{50\}$ (ostatnia szufladka zawiera tylko jedną liczbę). Kolejne liczby: $91, \ldots, 99$ rozłóżmy do kolejnych szufladek pojedynczo. W ten sposób otrzymaliśmy 50 szufladek. Jeśli więc chcemy wybrać 51 różnych liczb, to musimy wziąć dwie z jednej szufladki.

10. Zauważmy, że trójkąty AOB i CDO są równoramienne. Suma miar ich kątów przy wierzchołku O jest równa $270°$, zatem pozostałe kąty mają wspólnie $90°$, co oznacza, że suma miary kąta w trójkącie AOB przy wierzchołku A oraz miary kąta w trójkącie CDO przy wierzchołku C wynosi $45°$. W takim razie suma miar kątów BAC i ACD równa się $165°$, czyli miara kąta APC wynosi $15°$.