POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. W lesie rosło 50 drzew. Na połowie drzew wyrosło po 10 konarów, na pozostałych po 8. Na każdym konarze wyrosły 4 gałęzie. Na 30% gałęzi wyrosły po 4 gałązki, na pozostałych po 6 gałązek. Na każdej gałązce wyrosło 5 liści. W październiku połowa liści opadła, 20% zżółkło, 15% zbrązowiało, reszta liści pozostała zielona. Ile zielonych liści było w lesie na koniec października?

2. Ustaw liczby w kolejności od najmniejszej do największej: $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{10}-\sqrt{5}$.

3. Czy liczbę 2018 można pomnożyć przez taką liczbę naturalną, że otrzymany iloczyn przy dzieleniu przez 36 da resztę 1? Jeśli tak, to wskaż najmniejszą taką liczbę.

4. Uzasadnij, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 4 wynosi 2.

5. Chcielibyśmy zawieźć na koncert 62 osoby – przy czym możemy wynająć dowolną liczbę busów, z których każdy może zabrać do 14 osób, dowolną liczbę busików, z których każdy może zabrać do 10 osób, oraz dowolną liczbę taksówek osobowych, z których każda może przewieźć do 4 osób. Wyznacz, jak zorganizować najtańszy transport, jeśli koszt wynajęcia jednego busa wynosi 70 zł, jednego busika wynosi 55 zł, zaś jednej taksówki 26 zł.

6. Znajdź wszystkie parzyste liczby dwucyfrowe, dla których suma cyfr jest większa od ich iloczynu.

7. Z 24 jednakowych sześcianów zbudowano prostopadłościan o wysokości dwóch sześcianów. Pole powierzchni jednego sześcianu jest równe 6 cm^2. Jakie jest pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu?

8. Oblicz pole figury złożonej z dwóch kół o promieniu 1 położonych w ten sposób, że środek jednego z nich leży na obwodzie drugiego.

9. Podstawy trapezu równoramiennego mają długość 18 cm i 12 cm. Wysokość trapezu, o długości 9 cm, podzielono na 3 równe części, zaś przez punkty podziału poprowadzono proste równoległe do podstaw. Oblicz pola części, na które został podzielony trapez.

10. Stustronicowy album fotograficzny "Najpiękniejsze odcinki świata" został błędnie wydrukowany: każda strona o numerze parzystym pojawia się w nim dwukrotnie, tzn. w książce widzimy kolejno strony: $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, ..., 99, 100, 100$. Przez to po wydrukowaniu album ma więcej niż 100 stron. Ile razy na stronach tego albumu pojawia się cyfra 4?

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Gałęzi było $(25 \cdot 10 + 25 \cdot 8) \cdot 4 = 1800$, gałązek: $4 \cdot 0,3 \cdot 1800 + 6 \cdot 0,7 \cdot 1800 = 9720$. Skoro 15% wszystkich liści to liście zielone, to razem było ich $0,15 \cdot 5 \cdot 9720 = 7290$.

2. Przede wszystkim zauważamy, że wszystkie liczby są dodatnie. Oczywiście $\sqrt{10} > \sqrt{10} - \sqrt{5}$. Wiemy też, że $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 1 + 1 = 2$, zaś skoro $\sqrt{10} < 4$ i $\sqrt{5} > 2$, to $\sqrt{10} - \sqrt{5} < 2$, co oznacza, że $\sqrt{10} - \sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Porównajmy teraz liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{10}$. Ponieważ
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} = 5 + \sqrt{24} \quad \text{oraz} \quad (\sqrt{10})^2 = 10 = 5 + 5 = 5 + \sqrt{25},$$
to widzimy, że $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$. Ostatecznie, $\sqrt{10} - \sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.

3. Nie ma takiej liczby: pomnożenie 2018 przez dowolną liczbę da liczbę parzystą, a taka liczba przy dzieleniu przez 36 nie może dać reszty 1.

4. Oznaczmy cztery kolejne liczby naturalne przez $n, n+1, n+2, n+3$. Wtedy suma ich kwadratów wynosi: $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = 4(n^2 + 3n + 3) + 2$. Zatem teza zadania wynika z faktu, że liczba $n^2 + 3n + 3$ jest liczbą naturalną.

5. Zauważmy, że maksymalnie wystarczy 5 busów. Wtedy koszt będzie wynosił 350 zł. Możemy też wziąć tylko 4 busy (zapłacimy za nie 280 zł), ale do przewiezienia zostanie jeszcze 6 osób. Można je przewieść jednym busikiem albo dwiema taksówkami, z czego ta druga opcja jest tańsza (52 zł), co daje sumaryczny koszt w tym przypadku 332 zł. Możemy też wziąć tylko trzy busy (koszt 210 zł) a pozostałe 20 osób rozmieścić w busikach i taksówkach. Wystarczy rozważyć trzy możliwości (2,1,0 busików), aby dowiedzieć się, że w tym wypadku najtańsza opcja to wzięcie 2 busików i 0 taksówek (110 zł), więc ostatecznie przy trzech busach minimalny koszt to 320 zł. Analogicznie sprawdzamy pozostałe trzy przypadki (2,1,0 busów), lecz każda z pozostałych opcji okazuje się droższa niż 320 zł. Podsumowując, należy wynająć 3 busy i 2 busiki (za 320 zł w sumie).

6. Oznaczmy cyfrę dziesiątek liczby dwucyfrowej przez x, zaś cyfrę jedności przez y. Warunek w zadaniu sprowadza się wtedy do nierówności $x + y > xy$ lub równoważnie do $(x-1)(y-1) < 1$. Widzimy zatem, że jeśli zarówno x, jak i y będą większe niż 1, to nierówność nie będzie spełniona. Wystarczy zatem sprawdzić dwa przypadki $x = 1$ oraz $y = 0$. W pierwszym rozważana nierówność redukuje się do $0 \cdot (y-1) < 1$ i jest prawdziwa dla każdej parzystej cyfry y. W drugim do $-1 \cdot (x-1) < 0$ i jest prawdziwa dla dowolnego $x \neq 0$. Ostatecznie, poszukiwane liczby to:
$$10, 12, 14, 16, 18, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.$$

7. Zauważmy, że krawędź sześcianu ma długość 1 cm. W dolnej warstwie prostopadłościanu musi znaleźć się 12 sześcianów. Mogą być one ułożone na jeden z trzech sposobów: 1×12, 2×6 lub 3×4. W zależności od wybranego przypadku mamy prostopadłościany o wymiarach $1\text{cm} \times 12\text{cm} \times 2\text{cm}$ (który ma pole powierzchni całkowitej $2(12 + 2 + 24) = 76$ cm^2; $2\text{cm} \times 6\text{cm} \times 2\text{cm}$ (który ma pole powierzchni całkowitej równe $2(12 + 12 + 4) = 56$ cm^2 oraz $3\text{cm} \times 4\text{cm} \times 2\text{cm}$ (który ma pole powierzchni całkowitej równe $2(12 + 8 + 6) = 52$ cm^2.

8. Pole tej figury to suma pól kół pomniejszona o pole części wspólnej. Jeśli połączymy ze sobą środki okręgów oraz punkty przecięcia się okręgów, to widzimy, że figura będąca częścią wspólną kół składa się z dwóch trójkątów równobocznych o boku 1 i czterech odcinków kół o kącie środkowym $60°$. Oznaczając pole koła przez K ($K = \pi$), zaś pole

trójkąta równobocznego przez T ($T = \frac{\sqrt{3}}{4}$), pole odcinka koła jest równe $\frac{1}{6}K - T$, zaś pole całej rozważanej figury wynosi:

$$2K - \left(2T + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}K - T\right)\right) = \frac{4}{3}K + 2T = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9. Ponieważ proste podzieliły wyjściowy trapez na trzy trapezy o takich samych wysokościach i takich samych kątach, to w każdym z nich jest również taka sama różnica pomiędzy długością krótszej i dłuższej podstawy. W takim razie, długości odcinków podziału wynoszą 14 i 16 centymetrów. Pola poszczególnych części wynoszą zatem $P_1 = \frac{(12+14)\cdot 3}{2} = 39$ cm^2, $P_2 = \frac{(14+16)\cdot 3}{2} = 45$ cm^2 oraz $P_3 = \frac{(16+18)\cdot 3}{2} = 51$ cm^2.

10. Wydrukowana cyfra 4 może pojawić się albo na miejscu dziesiątek albo na miejscu jedności. Wśród numerów stron jest 10 liczb o cyfrze dziesiątek 4: $40, 41, ..., 49$, ale połowa z nich będzie wydrukowana dwukrotnie, a połowa jednokrotnie, co oznacza, że cyfra 4 na miejscu dziesiątek pojawi się dokładnie 15 razy. Analogicznie, wśród numerów stron jest 10 liczb z cyfrą jedności równą 4: $4, 14, ..., 94$ i każda z nich będzie wydrukowana dwukrotnie, co oznacza że na miejscu jedności cyfra 4 pojawi się 20 razy. Łącznie cyfra 4 będzie wydrukowana 35 razy.