POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

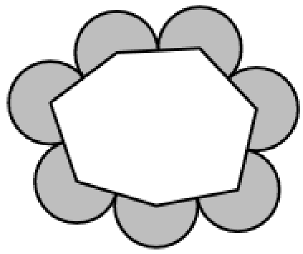
1. Podczas ostatniego sprawdzianu z matematyki 10% uczniów zdobyło 70 punktów, 35% uczniów 80 punktów, 30% uczniów 90 punktów, a reszta 100 punktów. Jaka jest różnica pomiędzy średnią wyników tego sprawdzianu a wynikiem, który pojawił się najczęściej?

2. W roku 2010 roślina matematyczna wypuściła pęd. Następnie w latach nieparzystych każdy pęd wypuszczał dwa pędy, a w latach parzystych trzy pędy. Ile było w sumie wypuszczonych pędów od 2010 do 2017 roku włącznie?

3. Figura $ABCD$ jest kwadratem. Punkt M leży na boku AB tak, że $AM : MB = 1 : 2$, a punkt N leży na boku CD tak, że $CN : ND = 2 : 1$. Przekątna DM czworokąta $AMND$ ma długość 40 centymetrów. Ile wynosi pole kwadratu $ABCD$?

4. Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych nie może być liczbą pierwszą.

5. Rysunek obok przedstawia siedmiokąt o równych bokach długości 10 cm (ale o różnych kątach) oraz siedem wycinków kół o promieniu 5 cm i o środkach w wierzchołkach siedmiokąta (zaznaczone na szaro). Ile wynosi suma pól wszystkich wycinków?



6. Ile wynosi reszta z dzielenia liczby $2^2 \cdot 3^{2017}$ przez 8?

7. Ściany boczne oraz kwadratowe dno akwarium są wykonane ze szkła o grubości 5 mm. Wiadomo, że zewnętrzna wysokość akwarium wynosi 20 cm. Mateusz do wypełnionego do połowy wodą akwarium wrzucił kamień o objętości 40 cm^3 i wtedy poziom wody podniósł się o 1 mm. Oblicz pole bocznej, zewnętrznej powierzchni akwarium.

8. Ambitny kwadrat każdej nocy potajemnie zwiększał swoje pole o 1. O ile zwiększył on długość swojego boku w nocy między ósmym a dziewiątym dniem, jeżeli pierwszego dnia miał pole 2?

9. Symbolem $n!$ (gdzie n jest liczbą naturalną) oznaczamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n (włącznie). Określ, ile dzielników parzystych ma liczba $7!$.

10. Mateusz wybrał się na wycieczkę rowerową o 9 rano i jechał ze stałą prędkością. W pewnym momencie rozpadało się bardzo mocno, więc momentalnie zwiększył swoją prędkość o 20%, aby szybciej dojechać do końca trasy. Gdyby całą trasę przebył z tą większą prędkością, to jego wycieczka trwałaby o 40 minut krócej. O której godzinie spadł deszcz?

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zauważmy, że najczęstszym wynikiem na sprawdzianie było 80 punktów. Zaś średnia wyników jest równa: $0,1 \cdot 70 + 0,35 \cdot 80 + 0,3 \cdot 90 + 0,25 \cdot 100 = 87$. Stąd szukana różnica to 7.

2. Można policzyć to jako sumę
$$1+2+2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2+2\cdot 3\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2+2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2=777.$$

3. Ponieważ czworokąt $AMND$ jest prostokątem o bokach długości $3x$ i x (gdzie $3x$ to długość boku kwadratu), to z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AMD otrzymujemy $x^2 = 160$. W takim razie pole kwadratu $ABCD$ wynosi $(3x)^2 = 9x^2 = 1440$ cm^2.

4. Oznaczmy cztery kolejne liczby naturalne przez $n, n+1, n+2, n+3$. Wtedy ich suma wynosi $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$, czyli jest liczbą parzystą większą niż 2, a w takim razie złożoną.

5. Suma kątów wielokąta wynosi $5 \cdot 180^\circ$. W takim razie, suma kątów środkowych wycinków jest równa $7 \cdot 360^\circ - 5 \cdot 180^\circ = 4,5 \cdot 360^\circ$, czyli suma pól wycinków jest równa polu czterech i pół kół o promieniu 5 cm. Daje to $112,5\pi$ cm^2.

6. Zauważmy, że liczba 3^{2017} jest liczbą nieparzystą, można więc zapisać ją jako $2n + 1$ dla pewnej liczby naturalnej n. W takim razie $2^2 \cdot 3^{2017} = 2^2 \cdot (2n + 1) = 8n + 4$, co oznacza, że reszta z dzielenia tej liczby przez 8 wynosi 4.

7. Oznaczmy wewnętrzny wymiar dna akwarium przez x (cm). Skoro po wrzuceniu kamienia poziom podniósł się o $0,1$ cm, to $x^2 \cdot 0,1 = 40$, czyli $x = 20$ (cm). W takim razie zewnętrzne wymiary ścian bocznych akwarium wynoszą 21cm $\times$ 20cm, czyli szukane pole powierzchni to $4 \cdot 21 \cdot 20 = 1680$ cm^2.

8. Łatwo wywnioskować, że n-tego dnia kwadrat miał pole $2 + n - 1 = n + 1$, stąd ósmego dnia miał bok $\sqrt{9} = 3$, a dziewiątego $\sqrt{10}$. Zatem rozważanej nocy kwadrat zwiększył długość swojego boku o $\sqrt{10} - 3$.

9. Ponieważ $7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, to wszystkich dzielników parzystych jest $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

10. Oznaczmy przez v początkową prędkość Mateusza a przez t liczbę godzin od 9 rano do momentu, kiedy przyspieszył. Z treści zadania wynika, że gdyby pierwszy fragment swojej trasy przejechał z prędkością $1,2v$, to fragment ten przebyłby w ciągu $t - \frac{2}{3}$ godziny. Otrzymujemy równanie $vt = 1,2v(t - \frac{2}{3})$, zatem $t = 4$. Wynika stąd, że deszcz spadł o godzinie 13.