POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

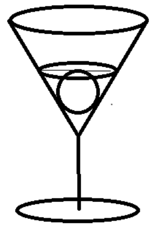
1. W Pomorskich Meczach Matematycznych liczba uczestników powiększyła się, w porównaniu z rokiem ubiegłym, o 20%. W ubiegłym roku chłopcy stanowili aż 60% wszystkich uczestników, zaś w tym roku jedynie 55%. Czy liczba chłopców w porównaniu z ubiegłym rokiem wzrosła, czy zmalała? O ile?

2. Dla każdej liczby naturalnej n obliczamy sumę wszystkich jej dzielników różnych od niej samej. Na przykład, dla $n = 12$ suma ta wynosi: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$. Które z liczb: $1, 3, 5, 7, 9$ możemy otrzymać jako tak wyliczoną sumę?

3. Adam zbierał kamyki. Pewnego dnia znalazł jeden kamyk. Potem codziennie znajdował trzykrotnie więcej kamyków niż dnia poprzedniego. Trwało to krócej niż tydzień. Począwszy od kolejnego dnia Adam codziennie zabierał 11 kamyków, aby rozdać je kolegom. Ostatnie 11 kamyków rozdał we wtorek. Którego dnia tygodnia Adam znalazł pierwszy kamyk?

4. Pewien pociąg jechał ze stałą prędkością, ale baaaardzo powoli. Monika postanowiła, że pobiegnie wzdłuż pociągu – tam i z powrotem, zaczynając od początku pociągu. Monika biegła cały czas ze stałą prędkością, przy czym biegnąc w jedną stronę potrzebowała na przebiegnięcie wzdłuż całego pociągu trzy razy mniej czasu niż podczas biegu w drugą stronę. Ile razy szybciej od pociągu biegła Monika?

5. Do kieliszka w kształcie stożka o kącie rozwarcia $60°$, częściowo napełnionego wodą, wrzucono kulkę o promieniu 2 cm. Gdy kulka osiadła na dnie okazało się, że jest styczna do górnej powierzchni wody. Ile cm^3 wody było w kieliszku przed wrzuceniem kulki?



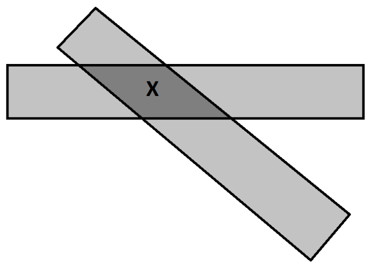
6. Wykaż, że liczba $2^{2021} - 2^{2017}$ dzieli się przez 240.

7. Komputer, przestawiając litery `T`, `S`, `A`, `I`, `L` na wszystkie możliwe sposoby, otrzymał 120 napisów pięcioliterowych. Następnie wypisał je w porządku alfabetycznym (zaczynając oczywiście od `AILST`), tworząc ponumerowaną listę. Na której pozycji pojawi się `LISTA` na tej liście?

8. Na prostej l zaznaczono punkty A i C, leżące w odległości 2 od siebie, oraz punkt B będący środkiem odcinka AC. Po jednej stronie prostej narysowano dwa półokręgi: o średnicy AB oraz o średnicy AC. Z punktu B poprowadzono łuk o środku C do punktu D należącego do drugiego półokręgu. Ile jest równe pole figury ABD ograniczonej przez wymienione łuki?

9. Liczba jabłek, liczba gruszek oraz liczba brzoskwiń to liczby dwucyfrowe. Jabłek jest dwa razy tyle co brzoskwiń. Gruszek jest dwa razy mniej niż brzoskwiń i równocześnie tyle ile wynosi suma cyfr w liczbie jabłek. Ile jest jabłek, brzoskwiń i gruszek?

10. Rysunek obok przedstawia figurę złożoną z dwóch częściowo nakładających się na siebie identycznych prostokątów. Pole części wspólnej tych prostokątów jest równe X i stanowi dokładnie jedną siódmą pola całej figury. Jaką częścią pola jednego prostokąta jest X?



PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczając przez n liczbę uczestników meczów w ubiegłym roku, wiemy, że było wśród nich $0,6n$ chłopców. W tym roku wszystkich uczestników jest $1,2n$, a wśród nich jest $0,55 \cdot 1,2n = 0,66n$ chłopców. W takim razie liczba chłopców zwiększyła się o $0,06n$, co stanowi $\frac{0,06n}{0,6n} \cdot 100\% = 10\%$ poprzedniej liczby chłopców.

   Uwaga: aby uznać zadanie za zrobione musi pojawić się odpowiedź ilościowa – albo przynajmniej sugestia jak ją wyliczyć. Nie wystarczy powiedzieć, że liczba chłopców wzrosła.

2. Zauważmy, że dla $n = 2$ suma wszystkich dzielników różnych od n wynosi 1, dla $n = 4$ – wynosi 3, dla $n = 8$ – wynosi 7, zaś dla $n = 15$ – wynosi 9. Pokażemy, że nigdy nie otrzymamy sumy 5. Rzeczywiście, jeśli przez $1, a, b, c, ...$ oznaczymy dzielniki danej liczby n wypisane rosnąco (tzn. $1 < a < b < ...$), to warunek $1 + a + b + ... = 5$ oznacza, że $a + b + ... = 4$. Jednak liczba 4 nie moze być zapisana jako suma dwóch lub większej liczby różnych liczb naturalnych większych od 1. Musi więc być tak, że jedynymi dzielnikami n są 1 i 4. Jeśli jednak n dzieli się przez 4, to dzieli się także przez 2. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dla żadnej liczby n suma dzielników różnych od niej samej nie będzie równa 5.

3. Jeżeli Adam zbierał kamyki przez $k < 7$ dni, to kolejno miał: 1, 4, 13, 40, 121, 364 kamyków. Jedynie 121 jest tu liczbą podzielną przez 11 musi więc być $k = 5$. Adam rozdawał kamienie przez 11 dni, zatem od zebrania pierwszego kamyka do rozdania wszystkich minęło $11 + 5 = 16$ dni zatem pierwszy kamyk Adam znalazł w poniedziałek.

4. Oznaczmy przez t czas, jaki potrzebowała Monika, aby przebiec od czoła pociągu do jego końca. Niech y oznacza długość pociągu zaś x odległość jaką pociąg przejeżdżał w czasie t. Biegnąc od początku pociągu do końca w czasie t Monika miała do pokonania drogę krótszą o dystans pokonany przez koniec pociągu w czasie t, czyli przebiegła odległość $y - x$. Z kolei biegnąc od końca do początku pociągu miała do pokonania drogę dłuższą o dystans pokonany przez czoło pociągu w czasie $3t$ czyli przebiegła odległość $y + 3x$. Ale droga pokonana przez Monikę w jedną stronę była trzykrotnie krótsza niż w drugą: $3(y - x) = y + 3x$ co oznacza, że $y = 3x$. Prędkość pociągu to x/t, zaś prędkość Moniki to $(y - x)/t = 2x/t$. Oznacza to, że Monika biegła dwa razy szybciej niż pociąg.

5. W przekroju osiowym, woda oraz kulka to trójkąt równoboczny i wpisane w niego koło o promieniu 2 cm. W takim razie, wysokość trójkąta ma długość 6 cm, a długość jego boku wynosi $4\sqrt{3}$ cm. Zatem objętość wody jest równa objętości stożka o promieniu podstawy $2\sqrt{3}$ cm i wysokości 6 cm, pomniejszona o objętość kuli o promieniu 2 cm:

$$\frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 6 - \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{40}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

6. Zauważmy, że

$$2^{2021} - 2^{2017} = 2^{2017}(2^4 - 1) = 2^{2017} \cdot 15 = 2^{2013} \cdot 2^4 \cdot 15 = 2^{2013} \cdot 240,$$

   co należało wykazać.

7. Na liście wydrukowanej przez komputer najpierw pojawią się napisy rozpoczynające się na literę `A` (i będzie ich $120 : 5 = 24$), następnie napisy na literę `I` (ich też będzie 24), a następnie napisy zaczynające się od `L`. Wśród napisów na `L` najpierw pojawią się te, w których drugą literą jest `A` (będzie ich $24 : 4 = 6$), a następnie będą wypisane te, w których drugą literą jest `I`: `LIAST`, `LIATS`, `LISAT` i wreszcie `LISTA`. Podsumowując, `LISTA` pojawi się na miejscu o numerze: $24 + 24 + 6 + 4 = 58$.

8. Łatwo widać, że trójkąt BCD jest równoboczny o boku 1. Rozważana figura jest półkolem ADC pomniejszonym o: półkole AB, wycinek CBD koła o środku C (o kącie środkowym 60°) oraz odcinek CD koła o środku w B (o kącie środkowym 60°). Zatem szukane pole to $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6} - (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

9. Jeżeli oznaczymy cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności liczby jabłek odpowiednio przez a i b, to jabłek jest $10a + b$, zaś gruszek jest $a + b$. Co więcej, z treści zadania wynika, że jabłek jest czterokrotnie więcej niż gruszek, tzn. $10a + b = 4(a + b)$. Stąd $b = 2a$, co daje jedynie cztery możliwości na liczbę jabłek: 12, 24, 36 i 48. Tylko dla ostatniej z nich liczba gruszek jest dwucyfrowa. Ostatecznie, jabłek jest 48, brzoskwiń jest 24 a gruszek 12.

10. Oznaczmy przez P pole jednego prostokąta. Zauważmy, że pole figury to $2P - X$, a z danych zadania wynika, że $2P - X = 7X$. W takim razie $P = 4X$, czyli X stanowi jedną czwartą pola prostokąta.