

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: gimnazjalny

### FINAŁ

1. Czy istnieje liczba naturalna  $n$  taka, że liczba  $2018^n$  ma dokładnie 2018 dzielników naturalnych?
2. Z okna domu Antka widać przystanek tramwajowy, na którym zatrzymują się tramwaje linii 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Antek nieco się nudzi i dlatego dla wszystkich trzech kolejno przejeżdżających tramwajów liczy iloczyn ich numerów. Ile różnych nieparzystych wyników może otrzymać Antek?
3. Rozwiąż równanie  $3x^2 + y^2 = 2xy + 4x - 2$ .
4. Na przeciwprostokątnej  $AB$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  zbudowano kwadrat leżący na zewnątrz trójkąta. Uzasadnij, że prosta przechodząca przez środek kwadratu oraz wierzchołek  $C$  dzieli kąt  $ACB$  na połowy.
5. Oblicz sumę długości wszystkich wysokości trójkąta o bokach 10 cm, 24 cm i 26 cm.

6. Rozstrzygnij, czy liczba

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 2018!}{2 \cdot 1009!}$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

7. W każdym wierzchołku ośmiościanu foremego umieszczono jedną liczbę całkowitą nieujemną. Następnie dla każdej ściany obliczono iloczyn liczb znajdujących się w jej wierzchołkach, a na koniec dodano osiem otrzymanych iloczynów i otrzymano 2018. Ile wynosiła suma liczb wpisanych w wierzchołki?
8. Dany jest okrąg  $O$  o środku  $S$ . Z punktu  $A$  leżącego poza okręgiem poprowadzono dwie półproste styczne do okręgu  $O$  w punktach  $K$  i  $L$ . Następnie przez punkt  $S$  przeprowadzono prostą, która przecięła półproste  $AK$  i  $AL$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Wiadomo, że  $|AP| = 8$ ,  $|AQ| = 15$ , zaś pole trójkąta  $APQ$  wynosi 69. Podaj, ile wynosi średnica okręgu  $O$ .
9. Długości boków pewnego trójkąta ostrokątnego są kolejnymi liczbami parzystymi. Wysokość poprowadzona na średni co do długości bok, dzieli ten bok na dwa odcinki. Wyznacz różnicę ich długości.
10. Znajdź liczby całkowite  $x, y, z$  spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} xy = 2017 - z \\ yz = 2018 - x. \end{cases}$$