# POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

## EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

### poziom: gimnazjalny

### FINAŁ

1. Czy istnieje liczba naturalna $n$ taka, że liczba $2018^n$ ma dokładnie 2018 dzielników naturalnych?

2. Z okna domu Antka widać przystanek tramwajowy, na którym zatrzymują się tramwaje linii 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9. Antek nieco się nudzi i dlatego dla wszystkich trzech kolejno przejeżdżających tramwajów liczy iloczyn ich numerów. Ile różnych nieparzystych wyników może otrzymać Antek?

3. Rozwiąż równanie $3x^2 + y^2 = 2xy + 4x - 2$.

4. Na przeciwprostokątnej $AB$ trójkąta prostokątnego $ABC$ zbudowano kwadrat leżący na zewnątrz trójkąta. Uzasadnij, że prosta przechodząca przez środek kwadratu oraz wierzchołek $C$ dzieli kąt $ACB$ na połowy.

5. Oblicz sumę długości wszystkich wysokości trójkąta o bokach 10 cm, 24 cm i 26 cm.

6. Rozstrzygnij, czy liczba
$$\frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2018!}{2 \cdot 1009!}$$
jest kwadratem liczby naturalnej.

7. W każdym wierzchołku ośmiościanu foremnego umieszczono jedną liczbę całkowitą nieujemną. Następnie dla każdej ściany obliczono iloczyn liczb znajdujących się w jej wierzchołkach, a na koniec dodano osiem otrzymanych iloczynów i otrzymano 2018. Ile wynosiła suma liczb wpisanych w wierzchołki?

8. Dany jest okrąg $O$ o środku $S$. Z punktu $A$ leżącego poza okręgiem poprowadzono dwie półproste styczne do okręgu $O$ w punktach $K$ i $L$. Następnie przez punkt $S$ przeprowadzono prostą, która przecięła półproste $AK$ i $AL$ odpowiednio w punktach $P$ i $Q$. Wiadomo, że $|AP| = 8$, $|AQ| = 15$, zaś pole trójkąta $APQ$ wynosi 69. Podaj, ile wynosi średnica okręgu $O$.

9. Długości boków pewnego trójkąta ostrokątnego są kolejnymi liczbami parzystymi. Wysokość poprowadzona na średni co do długości bok, dzieli ten bok na dwa odcinki. Wyznacz różnicę ich długości.

10. Znajdź liczby całkowite $x, y, z$ spełniające następujący układ równań:
$$\begin{cases} xy = 2017 - z \\ yz = 2018 - x. \end{cases}$$

**PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: gimnazjalny**

**FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ**

1. Nie. Rozkładając na czynniki pierwsze liczbę 2018, otrzymujemy $2018 = 2 \cdot 1009$, zatem $2018^n = 2^n \cdot 1009^n$, co oznacza, że liczba $2018^n$ ma $(n+1)\cdot(n+1)$ dzielników. Warunek w zadaniu sprowadza się zatem do równania $(n+1)^2 = 2018$, które nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

2. Aby iloczyn był nieparzysty, wszystkie trzy czynniki muszą być nieparzyste. Zatem może otrzymać 7 różnych wyników: $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729$.

3. Równanie to jest równoważne równaniu $2(x-1)^2 + (x-y)^2 = 0$, zatem jedynym rozwiązaniem jest $x = y = 1$.

4. Oznaczmy środek kwadratu przez $S$. Łatwo zauważyć, że okrąg opisany na trójkącie $ABC$ przechodzi też przez punkt $S$. Co więcej, zawarte w kwadracie łuki $AS$ i $BS$ są równej długości. Zatem kąty wpisane $ACS$ i $SCB$ są równe.

5. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, że badany trójkąt jest prostokątny. Zatem dwie jego wysokości są równe przyprostokątnym: 10 cm i 24 cm, a trzecią możemy obliczyć ze wzoru na pole trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot 26 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10$, czyli $h = 9\frac{3}{13}$ cm. Suma to $43\frac{3}{13}$ cm.

6. Oznaczmy badaną liczbę przez $A$. Z prostej tożsamości $(2n)! = 2 \cdot n \cdot (2n-1)!$ otrzymujemy
$$1! \cdot 2! = 2 \cdot 1 \cdot (1!)^2$$
$$3! \cdot 4! = 2 \cdot 2 \cdot (3!)^2$$
$$5! \cdot 6! = 2 \cdot 3 \cdot (5!)^2$$
i tak dalej, co daje
$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2018! = 2^{1009} \cdot 1009! \cdot (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2.$$
W takim razie
$$A = 2^{1008} \cdot (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2017!)^2 = \left(2^{504} \cdot (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2017!)\right)^2,$$
co oznacza, że $A$ jest kwadratem liczby naturalnej.

7. Oznaczmy liczby umieszczone w wierzchołkach odpowiednio przez $a, b, c, d, e, f$. Wówczas warunek dany w zadaniu sprowadza się do równania $(a+f)(b+d)(c+e) = 2018$. Ponieważ jedynymi rozkładami liczby 2018 na trzy nieujemne czynniki są $1 \cdot 1 \cdot 2018$ oraz $1 \cdot 2 \cdot 1009$, to szukana suma wynosi 2020 lub 1012.

8. Oznaczmy promień okręgu $O$ przez $r$. Pole trójkąta $SPA$ jest równe $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot r$, pole trójkąta $SAQ$ wynosi $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot r$, a w sumie oba pola dają pole trójkąta $PAQ$, co sprowadza się do równania
$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot r = 69.$$
W takim razie $r = 6$, czyli średnica okręgu $O$ wynosi 12.

9. Niech długości boków to: $n$, $n+2$ i $n+4$. Oznaczmy wysokość poprowadzoną na bok o długości $n+2$ przez $h$, a długości odcinków, na które dzieli ona ten bok przez $x$ i $y$ $(x > y)$. Z twierdzenia Pitagorasa możemy napisać: $h^2+x^2 = (n+4)^2$ oraz $h^2+y^2 = n^2$. Odejmując te równania stronami, otrzymujemy $x^2 - y^2 = 8n + 16$, czyli $(x+y)(x-y) = 8(n+2)$. Ponieważ $x + y = n + 2$, to $x - y = 8$.

10. Odejmując równania stronami, otrzymujemy $xy - yz = -1 - z + x$, co daje $(x-z)(y-1) = -1$. W takim razie, skoro liczby $x - z$ i $y - 1$ są całkowite, mamy dwie możliwości: albo $x - z = 1$ i $y - 1 = -1$, albo $x - z = -1$ i $y - 1 = 1$. Z pierwszej otrzymujemy $x = z + 1$ i $y = 0$, co po podstawieniu do rozważanego układu daje $x = 2018$, $y = 0$, $z = 2017$. Z drugiej mamy $x = z - 1$ i $y = 2$, co po wstawieniu do układu daje $x = 672$, $y = 2$, $z = 673$.