

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

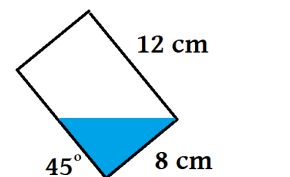
poziom: gimnazjalny

### PÓŁFINAŁ

1. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie  $x^2 = y^2 + 255$ .
2. Przekątne trapezu równoramiennego dzielą kąty przy dłuższej podstawie na połowy i przecinają się pod kątem  $120^\circ$ . Ramię ma długość  $6\sqrt{7}$  cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.
3. W każdym pojedynczym kroku możemy wykonać na liczbie jedną z operacji:
  - dopisać jej na końcu cyfrę 0,
  - podzielić ją przez 2 - o ile jest parzysta,
  - pomnożyć ją przez 2,
  - podzielić ją przez 5 - o ile ma na końcu 0 lub 5.

Czy w ten sposób po skończonej liczbie kroków możemy z liczby 201 dojść do 2018?

4. Pan Florian jest strażakiem, ale zastanawia się nad zmianą zawodu. Myśli sobie tak: „gdybym zrezygnował z bycia strażakiem 5 lat temu, to byłbym wówczas strażakiem przez  $\frac{1}{4}$  swego życia. Jeśli jednak zmienię pracę za 9 lat, to wówczas będę strażakiem przez połowę swego życia...”. Ile lat ma pan Florian?
5. Mamy dwa naczynia zawierające po 10 kg roztworu soli każde – oprócz tych naczyń nie mamy więcej ani wody, ani soli. W pierwszym naczyniu znajduje się roztwór o stężeniu 10%, zaś w drugim o stężeniu 30% (wagowo). Jak uzyskać maksymalną ilość roztworu o stężeniu 15%?
6. Na okręgu wybieramy trzy różne punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  tak, że środek okręgu  $O$  należy do dwusiecznej kąta  $\angle BCA$  oraz  $|\angle BCA| = 30^\circ$ . Następnie prowadzimy prostą prostopadłą do dwusiecznej kąta  $\angle BCA$ , przecinającą się z odcinkami  $AO$  i  $BO$  w punktach odpowiednio  $D$  i  $E$ . Wiedząc, że  $|AD| = 6$  oraz odcinek  $AE$  jest zawarty w dwusiecznej kąta  $\angle BAO$ , obliczyć  $|DE|$ .
7. Na szachownicy wymiaru  $2018 \times 2018$  ustawiamy skoczka szachowego w lewym dolnym rogu. Czy można, wykonując ruchy jak w szachach, umieścić skoczka w prawym górnym rogu, jeżeli wolno poruszać się tylko w kierunku ”pravo-góra”?
8. Pankracy przez całe wakacje brał kolejne piątki kolejnych liczb naturalnych (pierwszego dnia liczby 1, 2, 3, 4, 5; drugiego dnia 2, 3, 4, 5, 6, itd.) i te pięć wybranych liczb mnożył przez siebie. Uzyskany wynik zapisywał (pierwszego dnia zapisał 120, drugiego dnia 720, itd.). Pod koniec wakacji znalazł największy wspólny dzielnik wszystkich zapisanych liczb. Ile wynosił ten dzielnik?
9. Rysunek obok przedstawia szklankę w kształcie walca o średnicy dna 8 cm oraz wysokości 12 cm, wypełnioną częściowo wodą i nachyloną do poziomu pod kątem  $45^\circ$ . Jaką część objętości szklanki zajmuje woda?



10. Podstawą ostrosłupa  $ABCS$  jest trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym  $AC = BC = 2$ . Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości  $SA = SB = SC = 2$ . Niech  $D$  będzie środkiem odcinka  $AB$ . Udowodnij, że odcinki  $CD$  oraz  $SD$  są prostopadłe.