POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x^2 = y^2 + 255$.

2. Przekątne trapezu równoramiennego dzielą kąty przy dłuższej podstawie na połowy i przecinają się pod kątem $120°$. Ramię ma długość $6\sqrt{7}$ cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

3. W każdym pojedynczym kroku możemy wykonać na liczbie jedną z operacji:
   - dopisać jej na końcu cyfrę 0,
   - podzielić ją przez 2 - o ile jest parzysta,
   - pomnożyć ją przez 2,
   - podzielić ją przez 5 - o ile ma na końcu 0 lub 5.

   Czy w ten sposób po skończonej liczbie kroków możemy z liczby 201 dojść do 2018?

4. Pan Florian jest strażakiem, ale zastanawia się nad zmianą zawodu. Myśli sobie tak: „gdybym zrezygnował z bycia strażakiem 5 lat temu, to byłbym wówczas strażakiem przez $\frac{1}{4}$ swego życia. Jeśli jednak zmienię pracę za 9 lat, to wówczas będę strażakiem przez połowę swego życia...". Ile lat ma pan Florian?

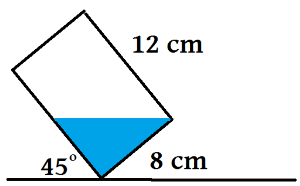
5. Mamy dwa naczynia zawierające po 10 kg roztworu soli każde – oprócz tych naczyń nie mamy więcej ani wody, ani soli. W pierwszym naczyniu znajduje się roztwór o stężeniu 10%, zaś w drugim o stężeniu 30% (wagowo). Jak uzyskać maksymalną ilość roztworu o stężeniu 15%?

6. Na okręgu wybieramy trzy różne punkty A, B i C tak, że środek okręgu O należy do dwusiecznej kąta $\angle BCA$ oraz $|\angle BCA| = 30°$. Następnie prowadzimy prostą prostopadłą do dwusiecznej kąta $\angle BCA$, przecinającą się z odcinkami AO i BO w punktach odpowiednio D i E. Wiedząc, że $|AD| = 6$ oraz odcinek AE jest zawarty w dwusiecznej kąta $\angle BAO$, obliczyć $|DE|$.

7. Na szachownicy wymiaru 2018×2018 ustawiamy skoczka szachowego w lewym dolnym rogu. Czy można, wykonując ruchy jak w szachach, umieścić skoczka w prawym górnym rogu, jeżeli wolno poruszać się tylko w kierunku "prawo-góra"?

8. Pankracy przez całe wakacje brał kolejne piątki kolejnych liczb naturalnych (pierwszego dnia liczby 1, 2, 3, 4, 5; drugiego dnia 2, 3, 4, 5, 6, itd.) i te pięć wybranych liczb mnożył przez siebie. Uzyskany wynik zapisywał (pierwszego dnia zapisał 120, drugiego dnia 720, itd.). Pod koniec wakacji znalazł największy wspólny dzielnik wszystkich zapisanych liczb. Ile wynosił ten dzielnik?

9. Rysunek obok przedstawia szklankę w kształcie walca o średnicy dna 8 cm oraz wysokości 12 cm, wypełnioną częściowo wodą i nachyloną do poziomu pod kątem $45°$. Jaką część objętości szklanki zajmuje woda?



10. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $AC = BC = 2$. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości $SA = SB = SC = 2$. Niech D będzie środkiem odcinka AB. Udowodnij, że odcinki CD oraz SD są prostopadłe.

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Przekształcając równanie do postaci $(x-y)(x+y)=255$, widzimy, że $x-y$ musi być dzielnikiem liczby 255 i to mniejszym od $\sqrt{255}$. Ponieważ $255=3\cdot 5\cdot 17$, to liczba 255 ma 8 dzielników: 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85 oraz 255, zatem wystarczy rozważyć cztery przypadki na $x-y$: 1, 3, 5, 15 (wtedy odpowiednio $x+y$ jest równe: 255, 85, 51, 17. Otrzymujemy cztery rozwiązania: $x=128, y=127$, $x=44, y=41$, $x=28, y=23$ oraz $x=16, y=1$.

2. Oznaczmy kolejne wierzchołki trapezu literami A, B, C i D (A, B przy dłuższej podstawie). Ponieważ trójkąt ACD jest równoramienny (kąty przy wierzchołkach A i C mają po $30°$), to $|CD|=6\sqrt{7}$. Oznaczmy przez E i F spodki wysokości trapezu opuszczone odpowiednio z wierzchołka D i C. Z własności trójkąta o kątach $30°, 60°, 90°$: $|AB|=|AE|+|EF|+|FB|=\frac{|AD|}{2}+|DC|+\frac{|BC|}{2}=12\sqrt{7}$. Długość interesującego nas odcinka jest średnią arytmetyczną długości podstaw, czyli wynosi $9\sqrt{7}$.

3. Nie. Zauważmy, że liczba 201 jest podzielna przez 3, a każda z opisanych operacji przekształca liczbę podzielną przez 3 na liczbę podzielną przez 3 (uzasadnienie!). Zatem z liczby 201 po skończonej liczbie kroków otrzymamy zawsze liczbę podzielną przez 3. Natomiast liczba 2018 nie dzieli się przez 3.

4. Układamy układ równań
$$\begin{cases}\frac{1}{4}(x-5)=y-5\\ \frac{1}{2}(x+9)=y+9.\end{cases}$$
gdzie x to aktualny wiek pana Floriana, zaś y aktualna liczba lat przepracowana jako strażak. Rozwiązując ten układ otrzymujemy $x=33$, $y=12$, zatem pan Florian ma obecnie 33 lata.

5. Załóżmy, że bierzemy s kg roztworu 10% oraz t kg roztworu 30%. Aby otrzymać roztwór 15% musi zachodzić relacja
$$\frac{0,1s+0,3t}{s+t}=\frac{15}{100},$$
co prowadzi do $s=3t$. Musimy więc wziąć 3 razy więcej roztworu 10% niż 30%. Maksymalna ilość mieszaniny to w związku z tym 10 kg roztworu 10% oraz $\frac{10}{3}$ kg roztworu 30%. Razem $13\frac{1}{3}$ kg.

6. Widzimy, że $|\angle BOA|=60°$. Oznacza to, że trójkąty AOB i EOD są równoboczne, zaś trójkąt AOE jest prostokątny (z kątem prostym przy wierzchołku E). Stąd $|EO|=\frac{1}{2}|AO|$. Daje nam to równanie $|EO|=\frac{1}{2}(|EO|+6)$, czyli ostatecznie $|EO|=|DE|=6$.

7. Każdy ruch zwiększa odległość skoczka od początkowego położenia o jedno pole w poziomie i dwa pola w pionie lub odwrotnie. Ponieważ końcowe położenie różni się o taką samą liczbę pól w poziomie i w pionie od położenia początkowego, to liczba ruchów zmieniających odległość o 1 w pionie musi być równa liczbie ruchów zmieniających odległość o 1 w poziomie. Zatem ilości ruchów zmieniających odległość w poziomie o 1 i o 2 są równe. Analogicznie dla zmian w pionie. Stąd wniosek, że możliwe położenia skoczka na przekątnej szachownicy różnią się od położenia początkowego o wielokrotność 3 w obu kierunkach. A ponieważ $2018-1$ nie dzieli się przez 3, to odpowiedź jest negatywna.

8. Zauważmy, że wśród pięciu kolejnych liczb naturalnych jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 5, co najmniej jedna liczba podzielna przez 3 oraz co najmniej dwie kolejne liczby parzyste, czyli jedna z nich dzieli się przez 4. W takim razie każdy z otrzymanych iloczynów musi być podzielny przez $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$. Z drugiej strony, pierwszy z uzyskanych iloczynów jest równy 120, zatem największy wspólny dzielnik wszystkich iloczynów to 120.

9. Zauważmy, że gdyby wysokość szklanki "skrócić" do 8 cm, to w rozważanym nachyleniu poziom wody sięgałby do granicy szklanki, zatem woda stanowiłaby dokładnie połowę całej objętości. Taka skrócona szklanka ma objętość równą 2/3 objętości prawdziwej szklanki, zatem ostatecznie otrzymujemy odpowiedź, że objętość wody to $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ objętości szklanki.

10. Zauważmy, że $|AB| = 2\sqrt{2}$ oraz $|CD| = \sqrt{2}$. Widzimy też, że trójkąt ABS jest przystający do trójkąta ABC (cecha bbb), skąd $|SD| = |CD| = \sqrt{2}$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDS mamy tezę.