POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: ponadgimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. Dla jakiej liczby naturalnej n suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ jest liczbą trzycyfrową o trzech jednakowych cyfrach?
2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa H, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$. Dla jakiej wartości H objętość tego ostrosłupa wynosi 36?
3. Czy liczby $1 + n + n^2 + \ldots + n^{2017}$ i $1 + n + n^2 + \ldots + n^{2018}$ mogą mieć wspólny dzielnik (większy od 1) dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n?
4. Pewna liczba całkowita dodatnia przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, zaś przy dzieleniu przez 5 i przez 7 daje resztę 4. Jaką resztę otrzymamy, dzieląc tę liczbę przez 140?
5. Znajdź wszystkie liczby całkowite x, y spełniające równanie $x^2 - y^2 = 3x$.
6. Dla liczby rzeczywistej x przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x (część całkowita liczby x). Znajdź wszystkie rozwiązania równania $x^2 - 5[x] + 4 = 0$.
7. Udowodnij, że dla każdej liczby niewymiernej x istnieje liczba niewymierna y taka, że iloczyn $x \cdot y$ jest liczbą wymierną.
8. W czworokącie $ABCD$ kąty DAB i ABC są równe, a punkt przecięcia się symetralnych boków AD i BC leży na AB. Wykaż, że przekątne tego czworokąta są równej długości.
9. Ile jest różnych (nieprzystających) trójkątów o bokach całkowitej długości i obwodzie równym 100?
10. W trójkącie równobocznym ABC o boku 2 punkt D jest środkiem boku AC, a punkt E leży na boku BC. Oblicz długość BE, jeżeli długość DE wynosi x.

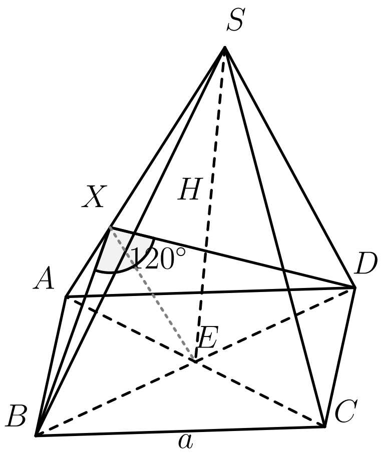
PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, szukamy n, dla którego zachodzi $\frac{n(n+1)}{2}=111c$, dla pewnego $c\in\{1,2,\ldots,9\}$. W takim razie $n(n+1)=2\cdot 3\cdot 37\cdot c$. Skoro 37 jest liczbą pierwszą, to 37 musi dzielić n albo $n+1$. W pierwszym przypadku, po wstawieniu $n=37k$, równanie przybiera postać $k(37k+1)=6c$ i widzimy, że $k\leqslant 1$. Jednak dla $k=1$ mamy $c\notin\{1,2,\ldots,9\}$. W drugim przypadku, po wstawieniu $n+1=37k$, równanie przybiera postać $(37k-1)k=6c$. Ponownie widzimy, że $k\leqslant 1$, lecz tym razem dla $k=1$ otrzymujemy $c=6$. Ostatecznie, $n=36$.

2. Niech X będzie punktem przecięcia krawędzi SA z płaszczyzną prostopadłą do SA, przechodzącą przez przekątną podstawy BD.

   Jeśli E jest spodkiem wysokości ostrosłupa, zaś a oznacza długość krawędzi przy podstawie, to mamy $EX=a/\sqrt{6}$, bo BEX jest połówką trójkąta równobocznego. Aby uzyskać związek pomiędzy a i H, zauważamy, że trójkąty AXE i AES są prostokątne ze wspólnym kątem przy A, a więc podobne. Obliczamy $AX=a/\sqrt{3}$ z twierdzenia Pitagorasa i z podobieństwa dostajemy $AE/AX=ES/EX$, czyli $H=ES=\frac{1}{2}a$. Zatem objętość wynosi $\frac{1}{3}(2H)^2\cdot H=\frac{4}{3}H^3$. Jest ona równa 36 dla $H=3$.



3. Nie. Niech bowiem k będzie wspólnym dzielnikiem obu tych liczb. Wtedy k jest również dzielnikiem liczby

$$(1+n+n^2+\ldots+n^{2018})-(1+n+n^2+\ldots+n^{2017})n,$$

   lecz ta równa się 1.

4. Oznaczmy liczbę, o której mowa w zadaniu przez a. Niech r będzie resztą z dzielenia a przez 140. Wtedy $a=140k+r$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej k. Wiemy też, że $r<140$ oraz że r daje z dzielenia przez 4, 5 i 7 te same reszty, co liczba a. W szczególności, liczba $r-4$ jest podzielna zarówno przez 5, jak przez 7. W takim razie $r-4$ jest równe 0, 35, 70 albo 105 (bo $r-4<136$) lub, równoważnie, r jest równe 4, 39, 74 albo 109. Z tych liczb tylko 109 daje resztę z dzielenia przez 4 równą 1. Ostatecznie, szukana reszta to 109.

5. Równanie zapiszmy w postaci $x(x-3)=y^2$. Jeżeli $x=3k$, to $y=3n$ oraz $k(k-1)=n^2$. Zatem k oraz $k-1$ są kwadratami liczb całkowitych lub ich przeciwnościami, ponieważ są liczbami względnie pierwszymi. Otrzymujemy zatem $k=0$ (wtedy rozwiązaniem jest para $(0,0)$) lub $k=1$, co daje rozwiązanie $(3,0)$. Jeżeli x nie jest podzielne przez 3, to

liczby x oraz $x-3$ są względnie pierwsze i każda z nich jest kwadratem liczby całkowitej lub liczbą do niego przeciwną. Oznacza to, że $x=4$ lub $x=-1$. Ostatecznie mamy następujące rozwiązania: $(0,0),(3,0),(4,2),(4,-2),(-1,2),(-1,-2)$.

6. Ponieważ $[x] \leqslant x$, mamy $-5x \leqslant -5[x]$. Zatem $(x-4)(x-1) = x^2-5x+4 \leqslant x^2-5[x]+4 = 0$, co daje $1 \leqslant x \leqslant 4$. W takim razie $[x]$ jest równe 1, 2, 3 lub 4. Rozpatrując każdy z tych przypadków osobno, otrzymujemy cztery rozwiązania: 1, $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$, 4.

7. Za y można wziąć $\frac{1}{x}$. Rzeczywiście, ponieważ odwrotnością niezerowej liczby wymiernej jest liczba wymierna, to odwrotnością liczby niewymiernej jest liczba niewymierna. Wtedy $x \cdot y = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

8. Oznaczmy punkt przecięcia się symetralnych przez P, zaś miarę kątów DAB i ABC przez α. Wtedy $|\angle APD| = |\angle CPB| = 180^\circ - 2\alpha$, co daje $|\angle APC| = |\angle DPB|$. W dodatku, $AP = PD$ oraz $CP = PB$, co pokazuje, że trójkąty APC i DPB są przystające. W takim razie $AC = DB$.

9. Oznaczmy boki trójkąta przez x, y, z. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $x \geqslant y \geqslant z$. Wtedy z warunku $x+y+z=100$ wynika, że $3x \geqslant 100$, czyli $x \geqslant 34$, zaś z warunku $x < y+z$ wynika, że $x < 100-x$, czyli $x \leqslant 49$. Ostatecznie, $x \in \{34, 35, \ldots, 49\}$. Dla każdego parzystego $x \in \{34, 35, \ldots, 49\}$ mamy następujące możliwości na (y,z): $(x, 100-2x)$, $(x-1, 100-2x+1)$, …, $(\frac{100-x}{2}, \frac{100-x}{2})$, więc jest ich $\frac{3}{2}x - 49$. Dla x nieparzystego mamy natomiast następujące możliwości na (y,z): $(x, 100-2x)$, $(x-1, 100-2x+1)$, …, $(\frac{101-x}{2}, \frac{99-x}{2})$, więc jest ich $\frac{3}{2}(x-1) - 48$. Wyniki wystarczy dodać:

$$\left[\left(\frac{3}{2}\cdot 34 - 49\right) + \left(\frac{3}{2}\cdot 36 - 49\right) + \ldots + \left(\frac{3}{2}\cdot 48 - 49\right)\right] +$$
$$+\left[\left(\frac{3}{2}\cdot 34 - 48\right) + \left(\frac{3}{2}\cdot 36 - 48\right) + \ldots + \left(\frac{3}{2}\cdot 48 - 48\right)\right] = 208$$

10. Niech Y będzie rzutem prostokątnym D na CB – wtedy $DY = \frac{\sqrt{3}}{2}$, oraz $CY = \frac{1}{2}$. Ponadto widzimy, że jeżeli $x \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, zadanie ma dwa rozwiązania, jeśli natomiast $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $x \in (1, \sqrt{3}]$, to rozwiązanie jest jedno. Dla pozostałych wartości x zadanie rozwiązań nie posiada. Ponieważ $EY = \sqrt{x^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$, $BY = \frac{3}{2}$, to $BE = BY - EY = \frac{3}{2} - \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}$ dla $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $x \in (1, \sqrt{3}]$, a jeżeli $x \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, to drugą możliwą wartością BE jest $BY + EY = \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}$.