POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Wykaż, że suma dwóch kolejnych liczb parzystych nie może być kwadratem liczby naturalnej.
2. Rozwiąż równanie $3^{xy} = 2^x + x$ w liczbach całkowitych.
3. Dany jest czworokąt o obwodzie 100 opisany na okręgu o promieniu r. Oblicz jego pole.
4. Dwa samochody jechały krzyżującymi się pod kątem prostym drogami w kierunku skrzyżowania. Volvo znajdowało się w odległości 20 km od skrzyżowania i jechało ze stałą prędkością 60 km/h, natomiast dla Fiata analogiczne liczby wynosiły 30 km i 80 km/h. Po minięciu skrzyżowania samochody kontynuowały jazdę. Jaka była najmniejsza odległość między samochodami?
5. Wiedząc, że $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = a$, oblicz $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.
6. W trójkącie ABC podstawa AB ma długość 12, a wysokość CD wynosi 9. Trójkąt ten podzielono dwiema prostymi równoległymi do podstawy AB na 3 części o równych polach. Ile wynoszą długości odcinków, na jakie proste te podzieliły CD?
7. Na płaszczyźnie narysowano 4 współśrodkowe okręgi o promieniach 5, 4, 3 oraz 2 cm. Na jaką wysokość należy podnieść trzy mniejsze okręgi, by wszystkie leżały na powierzchni stożka o wysokości 1 m, mającego w podstawie największy okrąg?
8. Rozstrzygnij, czy istnieje liczba naturalna, która jest podzielna zarówno przez 3, jak i przez 7 i w której zapisie występują jedynie cyfry 3 oraz 7 (ale każda z nich przynajmniej jeden raz!).
9. Na 8 czekach należy wpisać całkowite kwoty złotych tak, by przy pomocy tych czeków można było wypłacić dowolną kwotę od 1 do 250 zł.
10. Którą potęgą liczby 17 jest $(\sqrt{2873} + \sqrt{272})^{100}$?

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: ponadgimnazjalny

MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Suma dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 2, ale nie przez 4. Kwadrat każdej liczby parzystej musi jednak dzielić się przez 4.

2. Zauważmy, że jeśli x jest ujemne, to prawa strona równania jest ujemna, a lewa dodatnia. Jeśli $x = 0$, to równanie jest zawsze spełnione, a gdy $x > 0$, to również y musi być dodatnie.

   Niech więc $x, y > 0$. Ponieważ $x < 2^x$ mamy $3^x \leqslant 3^{xy} = 2^x + x < 2 \cdot 2^x$, czyli $(3/2)^x < 2$, co jest możliwe tylko dla $x = 1$. Wtedy także $y = 1$.

   Podsumowując, rozwiązaniami (x, y) równania $3^{xy} = 2^x + x$ w liczbach całkowitych są pary: $(1, 1)$ oraz $(0, y)$ dla dowolnej liczby całkowitej y.

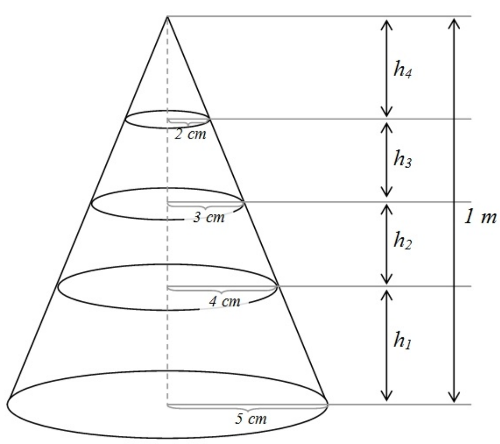
3. Ponieważ pole czworokąta opisanego na okręgu o promieniu r wynosi $P = \frac{1}{2}Ob \cdot r$, otrzymujemy odpowiedź:
$$P = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot r = 50r.$$

4. Jeżeli przez t oznaczymy czas liczony w godzinach, to odległość Volvo od skrzyżowania (w km) wynosi $|20 - 60t|$, a odległość Fiata: $|30 - 80t|$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy zatem, że kwadrat odległości między autami jest równy:
$$(20-60t)^2+(30-80t)^2 = 400-2400t+3600t^2+900-4800t+6400t^2 = 10000t^2-7200t+1300.$$
   Najmniejszą wartość tego wyrażenia otrzymamy dla $t = \frac{9}{25}$. Wynosi ona 4 i jest to kwadrat najmniejszej odległości między samochodami – zatem szukana odległość to 2 km.

5. Proste rachunki dają:
$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha \cdot \cos\alpha)^2 = 1 - 2a^2.$$

6. Długość podstawy trójkąta nie ma żadnego znaczenia. Pole każdej z części stanowi trzecią część całości, a więc korzystając z podobieństwa trójkątów pierwsza linia jest od wierzchołka odległa o $\sqrt{1/3} \cdot 9 = 3\sqrt{3}$, a kolejna o $\sqrt{2/3} \cdot 9 = 3\sqrt{6}$. Zatem długości poszczególnych części CD (licząc od wierzchołka C) wynoszą $3\sqrt{3}$, $3\sqrt{6} - 3\sqrt{3}$ i $9 - 3\sqrt{6}$.

7. Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać następujący ciąg równości:
$$\frac{5}{100} = \frac{4}{h_2 + h_3 + h_4} = \frac{3}{h_3 + h_4} = \frac{2}{h_4}.$$
   Mamy więc, że:
$$\frac{2}{h_4} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad h_4 = 40$$
$$\frac{3}{h_3 + h_4} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad h_3 + h_4 = 60 \quad \Rightarrow \quad h_3 = 20$$
$$\frac{4}{h_2 + h_3 + h_4} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad h_2 + h_3 + h_4 = 80 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 20$$
$$h_1 = 100 - (h_2 + h_3 + h_4) = 20.$$



   Pierwszy okrąg trzeba zatem podnieść na wysokość 20 cm, drugi – na wysokość 40 cm, a trzeci – na wysokość 60 cm.

8. Taka liczba istnieje, na przykład: 37737, czy 333333777777. Przykładów jest oczywiście nieskończenie wiele.

9. Ponieważ każdą liczbę można zapisać jednoznacznie jako pewną sumę potęg liczby 2, na czekach wpisujemy kwoty będące kolejnymi potęgami dwójki:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.$$

Takimi czekami możemy wypłacić dowolną kwotę nawet do 255 zł (przy wykorzystaniu wszystkich 8 czeków).

10. Ponieważ $2873 = 13^2 \cdot 17$, $272 = 4^2 \cdot 17$, to

$$\sqrt{2873} + \sqrt{272} = (13 + 4)\sqrt{17} = (17)^{3/2}.$$

W takim razie $(\sqrt{2873} + \sqrt{272})^{100} = 17^{150}$, tzn. rozważana liczba jest sto pięćdziesiątą potęgą liczby 17.