POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Znajdź przykład liczby naturalnej n takiej, że liczba $333n$ jest zapisana za pomocą samych jedynek.
2. Oblicz pole figury złożonej z dwóch kół o promieniach 1 cm i 2 cm takich, że średnica mniejszego koła jest cięciwą większego.
3. Udowodnij, że jeśli trójkąt ABC jest prostokątny, to suma pól okręgów o średnicach będących przyprostokątnymi tego trójkąta jest równa polu okręgu o średnicy będącej przeciwprostokątną trójkąta ABC.
4. Rozwiąż równanie $(xy)^2 = 2^{x+y}$ w liczbach całkowitych dodatnich.
5. Czy istnieje liczba pierwsza p taka, że $p + 216$ jest sześcianem liczby naturalnej?
6. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b. Prosta przechodząca przez środek przeciwprostokątnej i do niej prostopadła odcina z trójkąta czworokąt. Jakie jest pole tego czworokąta?
7. Przedyskutuj ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ y = x + m \end{cases}$$

   w zależności od parametru m.
8. Dwie sześciokątne płyty chodnikowe o grubości 10cm i boku 20cm ułożono jedna na drugiej, otrzymując płytę sześciokątną o podwójnej grubości. Następnie obrócono górną płytę po dolnej względem środka sześciokąta o kąt $30°$. Jakie jest pole powierzchni tak otrzymanego wielościanu?
9. Na klasycznej szachownicy (o wymiarach 8×8) wpisujemy liczby naturalne od 1 do 31. Następnie, na wolne pola, ponownie wpisujemy liczby od 1 do 31 tak, żeby te same liczby były na sąsiednich polach (pola są sąsiednie, jeśli mają wspólny bok). Udowodnij, że jeśli uda nam się to zrobić, to dwa wolne pola szachownicy będą różnych kolorów.
10. Rozwiąż równanie $2x^2 = 3\lfloor x \rfloor + 2$ (gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x, czyli największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x).