POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Znajdź przykład liczby naturalnej n takiej, że liczba $333n$ jest zapisana za pomocą samych jedynek.
2. Oblicz pole figury złożonej z dwóch kół o promieniach 1 cm i 2 cm takich, że średnica mniejszego koła jest cięciwą większego.
3. Udowodnij, że jeśli trójkąt ABC jest prostokątny, to suma pól okręgów o średnicach będących przyprostokątnymi tego trójkąta jest równa polu okręgu o średnicy będącej przeciwprostokątną trójkąta ABC.
4. Rozwiąż równanie $(xy)^2 = 2^{x+y}$ w liczbach całkowitych dodatnich.
5. Czy istnieje liczba pierwsza p taka, że $p + 216$ jest sześcianem liczby naturalnej?
6. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b. Prosta przechodząca przez środek przeciwprostokątnej i do niej prostopadła odcina z trójkąta czworokąt. Jakie jest pole tego czworokąta?
7. Przedyskutuj ilość rozwiązań układu równań:
$$\begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ y = x + m \end{cases}$$
w zależności od parametru m.
8. Dwie sześciokątne płyty chodnikowe o grubości 10cm i boku 20cm ułożono jedna na drugiej, otrzymując płytę sześciokątną o podwójnej grubości. Następnie obrócono górną płytę po dolnej względem środka sześciokąta o kąt $30°$. Jakie jest pole powierzchni tak otrzymanego wielościanu?
9. Na klasycznej szachownicy (o wymiarach 8×8) wpisujemy liczby naturalne od 1 do 31. Następnie, na wolne pola, ponownie wpisujemy liczby od 1 do 31 tak, żeby te same liczby były na sąsiednich polach (pola są sąsiednie, jeśli mają wspólny bok). Udowodnij, że jeśli uda nam się to zrobić, to dwa wolne pola szachownicy będą różnych kolorów.
10. Rozwiąż równanie $2x^2 = 3\lfloor x \rfloor + 2$ (gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x, czyli największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x).

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: ponadgimnazjalny

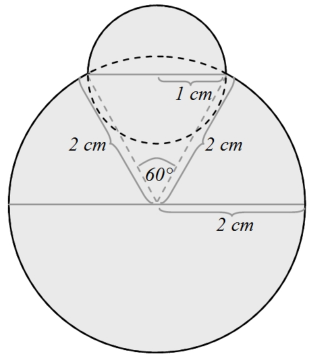
MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ liczbę $11\ldots1$ składającą się z k jedynek możemy zapisać jako: $\frac{1}{9}(10^k-1)$, problem sprowadza się do znalezienia rozwiązania równania: $333n = \frac{1}{9}(10^k-1)$, czyli: $\frac{1}{3}(10^3-1)n = \frac{1}{9}(10^k-1)$. Wówczas $n = \frac{10^k-1}{3(10^3-1)}$. Na przykład dla $k=9$ mamy:

$$n = \frac{10^9-1}{3(10^3-1)} = \frac{(10^3-1)(10^6+10^3+1)}{3(10^3-1)} = \frac{1}{3}(10^6+10^3+1) = \frac{1001001}{3} = 333667.$$

2. Odpowiedź: $\frac{23}{6}\pi+\sqrt{3}$ cm^2. Rysunek obok uzasadnia poniższe rachunki:

$$P = \frac{300}{360}\cdot\pi\cdot 2^2 + \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{20}{6}\pi+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\pi = \frac{23}{6}\pi+\sqrt{3}.$$



3. Niech a oraz b oznaczają długości przyprostokątnych tego trójkąta, zaś c – długość jego przeciwprostokątnej. Mamy wówczas (z twierdzenia Pitagorasa):

$$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(a^2+b^2) = \frac{\pi}{4}c^2 = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

4. Jasne jest, że xy jest całkowitą potęgą liczby 2, zatem $x=2^t, y=2^s$. Stąd $2^{2(t+s)} = 2^{2^t+2^s}$, czyli $t+s = 2^{t-1}+2^{s-1}$. Łatwo sprawdzić, że $t,s\neq 0$. Ponieważ $t=2^{t-1}$ dla $t=1$ i $t=2$ oraz $t<2^{t-1}$ dla $t\geqslant 3$, to $t,s\in\{1,2\}$. Zatem $x,y\in\{2,4\}$. Rozwiązaniami są $(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)$.

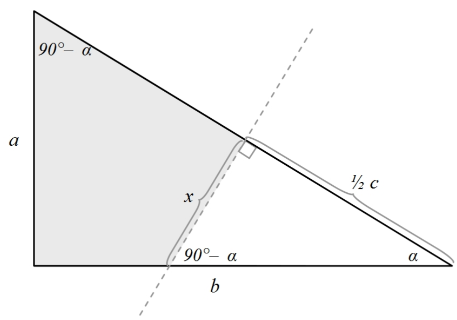
5. Jeżeli $p+216=n^3$ dla pewnej liczby naturalnej n, to $p=n^3-6^3$, czyli:

$$p=(n-6)(n^2+6n+36).$$

Ponieważ drugi czynnik jest zawsze większy od 1, a p ma być liczbą pierwszą, musi zachodzić: $n-6=1$, czyli $n=7$. Wówczas $p=127$ i, istotnie, jest to liczba pierwsza.

6. Odcięty trójkąt jest podobny do wyjściowego. Jeśli x jest długością odcinka danej prostej zawartego w trójkącie, to z podobieństwa mamy $\frac{x}{a} = \frac{\frac{1}{2}c}{b}$, gdzie $c=\sqrt{a^2+b^2}$, a zatem pole odciętego trójkąta wynosi

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot x = \frac{ac^2}{8b}.$$



Stąd szukane pole to

$$\frac{ab}{2}-\frac{ac^2}{8b} = \frac{a(3b^2-a^2)}{8b}.$$

7. Można rozpatrzeć odpowiednie przypadki, jednak najkrótsza będzie zapewne interpretacja geometryczna. Równania układu przedstawiają brzeg kwadratu o wierzchołkach $(3,0),(0,3),(-3,0),(0,-3)$ oraz prostą równoległą do dwóch boków tego kwadratu. Prosta ta nie ma punktów wspólnych z kwadratem (układ nie ma rozwiązań), gdy $m\in$

$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Ma dokładnie dwa punkty wspólne z brzegiem kwadratu, gdy $m \in (-3, 3)$, a gdy $m = -3$ lub $m = 3$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (cały bok kwadratu).

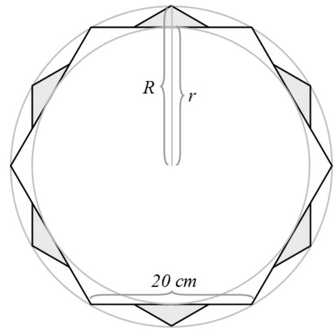
Podobnie można poprowadzić rozumowanie po wykonaniu podstawienia interpretując wyrażenie $|x| + |x + m|$ jako sumę odległości punktu x od punktu 0 i od punktu $-m$ na osi liczbowej.

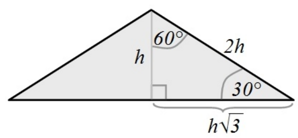
8. Powierzchnia otrzymanego wielościanu składa się z:

   I dwóch sześciokątów o boku 20 cm, każdy o polu: $P_I = 6 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} = 600\sqrt{3}$ (cm^2),

   II dwunastu prostokątów o wymiarach 10 cm × 20 cm, każdy o polu: $P_{II} = 10 \cdot 20 = 200$ (cm^2),

   III dwunastu trójkątów równoramiennych o kącie 120° przy wierzchołku i wysokości h będącej różnicą promieni okręgów opisanego i wpisanego w sześciokąt – pole każdego takiego trójkąta wynosi: $P_{III} = \frac{1}{2} \cdot 2h\sqrt{3} \cdot h = h^2\sqrt{3}$. Ponieważ $h = R - r = 20 - \frac{20\sqrt{3}}{2} = 20 - 10\sqrt{3}$, mamy: $P_{III} = (20 - 10\sqrt{3})^2\sqrt{3} = 700\sqrt{3} - 1200$ (cm^2).





   Szukane pole powierzchni wielościanu wynosi zatem (w cm^2):

$$P = 2P_I + 12P_{II} + 12P_{III} = 2\cdot(600\sqrt{3}) + 12\cdot 200 + 12\cdot(700\sqrt{3} - 1200) =$$

$$= 1200\sqrt{3} + 2400 + 8400\sqrt{3} - 14400 = 9600\sqrt{3} - 12000.$$

9. Każda para takich samych liczb zajmuje na szachownicy pola różnych kolorów (bo sąsiednie pola mają różne kolory). Dwa pozostałe wolne pola muszą więc także mieć różne kolory.

10. Jeżeli $x < 0$, to $3\lfloor x \rfloor + 2 \leqslant -3 + 2 < 0$, co nie jest możliwe. Jeżeli $x \geqslant 3$, to

$$2x^2 \geqslant 2x\lfloor x \rfloor \geqslant 6\lfloor x \rfloor \geqslant 3\lfloor x \rfloor + 9 > 3\lfloor x \rfloor + 2,$$

   zatem $\lfloor x \rfloor$ przyjmuje jedną z wartości $0, 1, 2$. Jedyne rozwiązania uzyskujemy gdy $\lfloor x \rfloor = 1$ (wówczas $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$) oraz gdy $\lfloor x \rfloor = 2$ (wówczas $x = 2$).

   Podsumowując, rozwiązaniami równania są: $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ oraz $x = 2$.