POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Wykaż, że liczba $2^{2004} - 2^4$ dzieli się przez 240.

2. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby całkowite x, y, że:
$$x^2(1 + x + x^2 + \cdots + x^{20}) + x^7(1 + x + x^2 + \cdots + x^{17}) = 4y^2 + 2017x^{2+0+1+7} + 2017.$$

3. Podaj najmniejszą liczbę naturalną, przez którą powinno się pomnożyć 2018, by otrzymać liczbę, która przy dzieleniu przez 17 daje resztę 1.

4. Firma produkuje dwa rodzaje kajaków: dwuosobowe i jednoosobowe. W ubiegłym roku sprzedała czterysta kajaków mieszczących pięćset osób, przy czym dochód ze sprzedaży większych kajaków był dwukrotnie mniejszy. Ile razy droższy jest kajak dwuosobowy od jednoosobowego?

5. Jaki jest promień okręgu opisanego na dwunastokącie foremnym o boku długości 1?

6. Drut o długości 1 m rozciągnięto tak, że jego grubość zmalała czterokrotnie. Czy można nim ogrodzić powierzchnię o polu 20 m^2?

7. Dany jest czworościan $ABCD$ o objętości V. Przez każdy jego wierzchołek poprowadzono płaszczyznę równoległą do przeciwległej ściany. Jaka jest objętość powstałego w ten sposób czworościanu?

8. Liczbę nazywamy palindromiczną, jeśli zapisana od lewej do prawej i od prawej do lewej wygląda tak samo. Jaka jest minimalna różnica między dwiema kolejnymi pięciocyfrowymi liczbami palindromicznymi?

9. Ile jest liczb czterocyfrowych o sumie cyfr 4.

10. Każda z liczb: $x_1, x_2, ..., x_{2017}$ jest równa 1 bądź -1. Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{2016}x_{2017} + x_{2017}x_1?$$

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: ponadgimnazjalny

MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mamy: $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ oraz $2^{2004} - 2^4 = 2^4(2^{1000} - 1)(2^{1000} + 1)$. Zauważamy, że liczba $2^{1000} - 1$ jest podzielna przez 5, natomiast jedna z liczb $2^{1000} - 1$ oraz $2^{1000} + 1$ musi być podzielna przez 3.

2. Lewa strona równania ma taką samą parzystość jak x, natomiast prawa – inną. Zatem takie liczby nie istnieją.

3. 2018 przy dzieleniu przez 17 daje resztę 12. Szukamy więc takiej najmniejszej wielokrotności liczby 12, by była ona postaci $17n + 1$ dla pewnego n całkowitego. Liczbą taką jest 120, co oznacza, że 2018 musimy pomnożyć przez 10.

4. Dwuosobowy kajak jest $1,5$ raza droższy.

5. Rozważmy trójkąt, którego podstawą jest bok wielokąta, a trzecim wierzchołkiem – środek okręgu opisanego na tym wielokącie. Ramiona tego trójkąta mają długość r, która jest szukaną wielkością. Trójkąt ma jeden kąt o mierze $30°$ oraz dwa kąty po $75°$. Obliczając pole trójkąta na dwa sposoby, otrzymujemy: $r^2 \sin 30° = r \sin 75°$, skąd $r = 2 \sin 75° = 2\sin(30° + 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$.

6. Tak. Drut rozciągnie się do długości 16 m, a więc obwodu koła o promieniu $8/\pi$ m. Takie koło ma pole równe $64/\pi$ m^2, a więc więcej niż 20 m^2.

7. $27V$. Wierzchołki wyjściowego czworościanu będą środkami ciężkości ścian nowego. Oznacza to, że krawędzie powstałego czworościanu będą trzykrotnie dłuższe, a objetość – 27 razy większa.

8. Odpowiedź to 11. Najmniejszą różnicę otrzymamy na przykład dla: $20002 - 19991 = 11 = 30003 - 29992$. Różnica dwóch pięciocyfrowych liczb palindromicznych $abcba - defed$ jest równa $10001(a-d) + 1010(b-e) + 100(c-f)$. Łatwo zobaczyć, że gdy $a = d$, to wyrażenie wynosi przynajmniej 100 (bo wszystkie nawiasy nie mogą się zerować), a jeśli $a - d = 1$, to by wartość była najmniejsza trzeba mieć $b - e = -9 = c - f$.

9. Odpowiedź: 20. Pytanie jest równoważne zagadnieniu, na ile sposobów można rozmieścić 4 nierozróżnialne piłeczki w czterech pudełkach z napisami "tysiące', "setki", "dziesiątki" i "jedności" tak, aby w pierwszym była co najmniej jedna piłeczka (bo chcemy liczbę czterocyfrową). Jedną z piłeczek umieszczamy zatem w pierwszym pudełku i pozostają nam do rozmieszczenia 3 piłeczki, które "wrzucamy" do czterech pudełek. Pudełka można reprezentować trzema pionowymi kreskami rozdzielającymi. Daje to odpowiedniość z ciągami długości 6 o dokładnie trzech jedynkach, czyli jest ich $\binom{6}{3} = 20$. Alternatywnie można policzyć osobno liczby z 4 na początku: tylko 4000, z 3 na początku: 3 liczby, z 2 na początku: 3 (dalej dwójka)+3(dalej dwie jedynki) liczby oraz z 1 na początku: 3 (dalej trójka)+6(dalej dwójka i jedynka)+1 (dalej same jedynki).

10. Najmniejszą wartość otrzymamy, jeżeli możliwie największa liczba wyrażeń $x_i x_{i+1}$ (przy czym przyjmujemy oznaczenie $x_{2018} = x_1$) przyjmuje wartość -1. Oznacza to, że x_i oraz x_{i+1} muszą mieć przeciwne znaki. Nie jest to możliwe dla wszystkich $i = 1, 2, ..., 2017$; jest jednak możliwe dla $i = 1, 2, ..., 2016$. Wówczas najmniejsza możliwa wartość wyniesie $2016 \cdot (-1) + 1 = -2015$.