POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: szkoła ponadgimnazjalna

FINAŁ

1. Na okręgu, w równych odstępach, zaznaczono 2018 punktów: 2017 czarnych i jeden biały. Następnie utworzono wszystkie możliwe wielokąty wypukłe o wierzchołkach w zaznaczonych punktach. Jeśli wielokąt miał wszystkie wierzchołki czarne, to zaliczany był do zbioru wielokątów czarnych, a jeśli jeden z jego wierzchołków był biały, to zaliczany był do wielokątów dwubarwnych. Określ, którego typu wielokątów było więcej: czarnych czy dwubarwnych.

2. Rozważmy wielomian $x^5 + x^2 + px + q$, gdzie parametry p i q są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Uzasadnij, że wielomian ten nie może mieć pięciu pierwiastków rzeczywistych (nawet gdy liczymy z krotnościami).

3. Ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie jest nieparzysta liczba cyfr nieparzystych?

4. Na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b ($a < b$) obrano punkt P taki, że suma jego odległości od przyprostokątnych jest średnią geometryczną a i b. W jakim stosunku punkt P podzielił przeciwprostokątną?

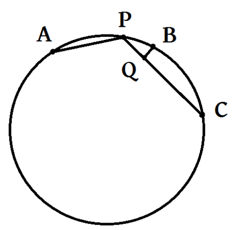
5. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Rozwiąż równanie
$$\Big[[x] - x\Big] + 1 = 0.$$

6. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna $n \leqslant 2018$, że
$$NWD\left(\binom{2018}{n}, \binom{2018+1}{n}, \binom{2018+2}{n}, \ldots, \binom{2018+n}{n}\right) > 1.$$

7. Antek i Basia grają w następującą grę: Antek rzuca symetryczną monetą 20 razy, a Basia – tą samą monetą – 21 razy. Basia wygrywa tylko wtedy, gdy wyrzuci więcej orłów niż Antek. Które z nich ma większą szansę wygrania?

8. O liczbach całkowitych n i k wiadomo, że
$$|n+3| + |k+3| = |n+2| + |k+2| = |n-1| + |k-1|.$$
Jaka może być najmniejsza wartość wyrażenia $|n-k|$?

9. Podaj wszystkie liczby naturalne n takie, że ze zbioru $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ można wybrać cztery różne liczby x, y, z, u spełniające równość $xy = zu$.



10. Na rysunku obok łuki AB i BC są tej samej długości, zaś odcinek BQ jest prostopadły do odcinka PC. Uzasadnij, że $|AP| + |PQ| = |QC|$.