POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: szkoła ponadgimnazjalna

FINAŁ

1. Na okręgu, w równych odstępach, zaznaczono 2018 punktów: 2017 czarnych i jeden biały. Następnie utworzono wszystkie możliwe wielokąty wypukłe o wierzchołkach w zaznaczonych punktach. Jeśli wielokąt miał wszystkie wierzchołki czarne, to zaliczany był do zbioru wielokątów czarnych, a jeśli jeden z jego wierzchołków był biały, to zaliczany był do wielokątów dwubarwnych. Określ, którego typu wielokątów było więcej: czarnych czy dwubarwnych.

2. Rozważmy wielomian $x^5 + x^2 + px + q$, gdzie parametry p i q są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Uzasadnij, że wielomian ten nie może mieć pięciu pierwiastków rzeczywistych (nawet gdy liczymy z krotnościami).

3. Ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie jest nieparzysta liczba cyfr nieparzystych?

4. Na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b ($a < b$) obrano punkt P taki, że suma jego odległości od przyprostokątnych jest średnią geometryczną a i b. W jakim stosunku punkt P podzielił przeciwprostokątną?

5. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Rozwiąż równanie
$$\Big[[x] - x\Big] + 1 = 0.$$

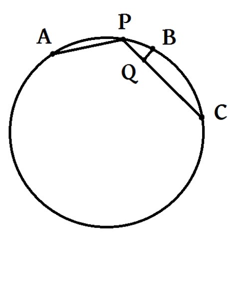
6. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna $n \leqslant 2018$, że
$$NWD\left(\binom{2018}{n}, \binom{2018+1}{n}, \binom{2018+2}{n}, \ldots, \binom{2018+n}{n}\right) > 1.$$

7. Antek i Basia grają w następującą grę: Antek rzuca symetryczną monetą 20 razy, a Basia – tą samą monetą – 21 razy. Basia wygrywa tylko wtedy, gdy wyrzuci więcej orłów niż Antek. Które z nich ma większą szansę wygrania?

8. O liczbach całkowitych n i k wiadomo, że
$$|n+3| + |k+3| = |n+2| + |k+2| = |n-1| + |k-1|.$$
Jaka może być najmniejsza wartość wyrażenia $|n-k|$?

9. Podaj wszystkie liczby naturalne n takie, że ze zbioru $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ można wybrać cztery różne liczby x, y, z, u spełniające równość $xy = zu$.

10. Na rysunku obok łuki AB i BC są tej samej długości, zaś odcinek BQ jest prostopadły do odcinka PC. Uzasadnij, że $|AP| + |PQ| = |QC|$.



PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Więcej było wielokątów dwubarwnych. Zauważmy bowiem, że każdemu n-kątowi czarnemu możemy przyporządkować $(n+1)$-kąt dwubarwny poprzez dodanie białego wierzchołka. Widzimy, że tak zdefiniowane przyporządkowanie jest różnowartościowe, ale nie jest "na", gdyż nic nie przechodzi na dwubarwne trójkąty, których jest $2017 \cdot 1008$.

2. Przypuśćmy, że dla pewnych p i q wielomian $x^5 + x^2 + px + q$ ma pięć pierwiastków: x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5. Wówczas

$$x^5 + x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)x^4$$

$$+(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5)x^3 + x^2 + px + q.$$

Stąd $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ oraz $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = 0$, co daje

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2$$

$$-2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5) = 0.$$

Jednak to oznacza, że $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, co jest sprzeczne z postacią wielomianu.

3. Policzmy, ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie występuje jedna cyfra nieparzysta. Może ona stać na pierwszym miejscu (takich liczb jest 5^6) lub na którymś z pozostałych miejsc (takich liczb jest $4 \cdot \binom{5}{1} \cdot 5^5$). Razem więc mamy $25 \cdot 5^5$ takich liczb. Analogicznie policzymy liczbę sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie są trzy cyfry nieparzyste:

$$5 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5^5 + 4 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5^5 = 9 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5^5 = 90 \cdot 5^5$$

oraz liczbę sześciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie jest pięć cyfr nieparzystych:

$$5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 5^5 + 4 \cdot \binom{5}{5} \cdot 5^5 = 29 \cdot 5^5.$$

Ostatecznie, szukanych liczb jest $144 \cdot 5^5 = 450\,000$.

4. Umieśćmy trójkąt w układzie współrzędnych tak, by wierzchołki miały współrzędne $(0,0)$, $(0,a)$, $(b,0)$. Wówczas współrzędne (x,y) punktu P spełniają zależność $ax + by = ab$ oraz, z treści zadania, $x + y = \sqrt{ab}$. Rozwiązując układ równań otrzymujemy

$$x = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \qquad y = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Zatem szukany stosunek, to $\dfrac{x}{b-x} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

5. Liczba $[x] - x$ jest zawsze w przedziale $(-1; 0\rangle$, a więc lewa strona równania przyjmuje wartość 0 lub 1, przy czym 1 tylko wtedy, gdy x jest całkowite. Równanie spełniają zatem wszystkie te liczby rzeczywiste, które nie są całkowite.

6. Nie. Przypuśćmy bowiem, że liczba d jest wspólnym dzielnikiem wszystkich podanych symboli Newtona. Jednak jeśli d jest dzielnikiem $\binom{2018+k}{n}$ i $\binom{2018+k+1}{n}$, to musi też dzielić $\binom{2018+k+1}{n} - \binom{2018+k}{n} = \binom{2018+k}{n-1}$. W takim razie d musi dzielić następujące symbole Newtona:

$$\binom{2018}{n-1}, \binom{2018+1}{n-1}, \binom{2018+2}{n-1}, \ldots, \binom{2018+n-1}{n-1}.$$

   Rekurencyjnie, otrzymujemy, że d musi dzielić $\binom{2018}{0} = 1$.

7. Zamieniając wszystkie orły na reszki i odwrotnie, otrzymujemy odpowiedniość pomiędzy zdarzeniami, w których wygrywa Basia, a tymi, w których wygrywa Antek. Każde z nich ma zatem jednakową szansę na zwycięstwo.

8. Załóżmy, bez zmniejszania ogólności, że $n \geqslant k$. Szkicując wykres funkcji $f(x) = |n-x|+|k-x|$, widzimy, że jest ona malejąca na przedziale $(-\infty, k\rangle$ oraz rosnąca na $\langle n, \infty)$. Warunek w zadaniu mówi, że $f(-3) = f(-2) = f(1)$. Jeśli $n = k$, to funkcja f żadnej wartości nie przyjmuje trzykrotnie. Jeśli $n > k$, to funkcja f jest stała na przedziale $\langle k, n\rangle$, zatem warunek będzie spełniony tylko wtedy, gdy $-3, -2, 1 \in \langle k, n\rangle$. Wynika stąd, że $|n-k| \geqslant 4$. Co więcej, przyjmując $k = -3$ oraz $n = 1$, widzimy, że warunek w zadaniu jest spełniony, skąd wynika, że może być $|n-k| = 4$. Ostatecznie, najmniejsza możliwa wartość $|n-k|$ to 4.

9. Oczywiście dla $n \leqslant 2$ nie da się wybrać czterech różnych liczb, bo zbiór jest za mały. Jeśli weźmiemy liczby $x = n$, $y = n^2-1$, $z = n+1$, $u = n^2-n$, to otrzymujemy tożsamość. Potrzeba jeszcze sprawdzić, czy liczby te są w rozważanym zbiorze i czy są wszystkie różne. Jednak gdy $n > 2$, to zawsze $n = x < z < u < y < n^2$, więc odpowiedzią są wszystkie liczby naturalne większe od 2.

10. Oznaczmy przez α kąt wpisany oparty na łuku AB lub BC. Niech Q' oznacza rzut B na półprostą AP. Mamy wtedy $\measuredangle BPQ' = 180° - \measuredangle APB = 180° - (180° - \alpha) = \alpha = \measuredangle BPQ$. Stąd trójkąty PBQ i PBQ' są przystające i wystarczy stwierdzić równość $|AQ'| = |QC|$.

    Zauważmy, że kąty $\measuredangle BAP$ i $\measuredangle BCP$ są równe, więc trójkąty prostokątne $AQ'B$ i CQB są przystające (cecha *kbk*), skąd wynika teza.