

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: szkoła ponadgimnazjalna

PÓŁFINAŁ

1. Wskazówka minutowa po "naprawie" porusza się we właściwym tempie, ale w przeciwną stronę, natomiast mała wskazówka porusza się prawidłowo. Ustawiono aktualną godzinę 12^{05} i uruchomiono zegar. Ile razy w ciągu doby wskazówki pokryją się?
2. Która z dwóch liczb jest większa: $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ czy $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$?
3. Wykaż, że równanie $3^x + 4 = y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.
4. Funkcja f przyporządkowuje każdemu punktowi płaszczyzny liczbę rzeczywistą w taki sposób, że jeśli A, B, C, D są wierzchołkami kwadratu, to $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Udowodnij, że wówczas dla każdego punktu P musi być $f(P) = 0$.
5. O liczbie całkowitej a wiadomo, że trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (a, 1)$, $B = (1, a+3)$ i $C = (2, 5)$ ma pole równe 2. Podaj równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .
6. Liczbę $\left(\sqrt[5]{5} + \sqrt[7]{7}\right)^{2018}$ możemy zapisać jako sumę iloczynów postaci $a_k(\sqrt[5]{5})^k(\sqrt[7]{7})^{2018-k}$, gdzie $k = 0, 1, \dots, 2018$, zaś a_k jest liczbą całkowitą. Ile spośród tych składników jest liczbą wymierną?
7. Dwa okręgi o promieniach R i r są styczne do danej prostej w różnych punktach i wzajemnie styczne. Znajdź promień d okręgu stycznego do obu tych okręgów i do tej prostej.
8. W płocie sztachety są przymocowane w równych odległościach i każda jest pomalowana na czerwono lub zielono. Suma odległości sztachet zielonych od prawego skraju płotu jest większa od sumy odległości czerwonych sztachet od lewego skraju płotu. Czy oznacza to, że zielonych sztachet jest więcej?
9. Wykaż, że $\log_{2016} 2018 + \log_{2018} 2017 > 2$.
10. W pewnym stożku pole podstawy, pole powierzchni kuli wpisanej oraz pole powierzchni bocznej (w podanej kolejności) tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej tego stożka do płaszczyzny podstawy.