UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: szkoła ponadgimnazjalna

PÓŁFINAŁ

1. Wskazówka minutowa po "naprawie" porusza się we właściwym tempie, ale w przeciwną stronę, natomiast mała wskazówka porusza się prawidłowo. Ustawiono aktualną godzinę 12^{05} i uruchomiono zegar. Ile razy w ciągu doby wskazówki pokryją się?

2. Która z dwóch liczb jest większa: $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ czy $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$?

3. Wykaż, że równanie $3^x + 4 = y^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

4. Funkcja f przyporządkowuje każdemu punktowi płaszczyzny liczbę rzeczywistą w taki sposób, że jeśli A, B, C, D są wierzchołkami kwadratu, to $f(A)+f(B)+f(C)+f(D) = 0$. Udowodnij, że wówczas dla każdego punktu P musi być $f(P) = 0$.

5. O liczbie całkowitej a wiadomo, że trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (a, 1)$, $B = (1, a+3)$ i $C = (2, 5)$ ma pole równe 2. Podaj równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

6. Liczbę $\left(\sqrt[5]{5} + \sqrt[7]{7}\right)^{2018}$ możemy zapisać jako sumę iloczynów postaci $a_k(\sqrt[5]{5})^k(\sqrt[7]{7})^{2018-k}$, gdzie $k = 0, 1, ..., 2018$, zaś a_k jest liczbą całkowitą. Ile spośród tych składników jest liczbą wymierną?

7. Dwa okręgi o promieniach R i r są styczne do danej prostej w różnych punktach i wzajemnie styczne. Znajdź promień d okręgu stycznego do obu tych okręgów i do tej prostej.

8. W płocie sztachety są przymocowane w równych odległościach i każda jest pomalowana na czerwono lub zielono. Suma odległości sztachet zielonych od prawego skraju płotu jest większa od sumy odległości czerwonych sztachet od lewego skraju płotu. Czy oznacza to, że zielonych sztachet jest więcej?

9. Wykaż, że $\log_{2016} 2018 + \log_{2018} 2017 > 2$.

10. W pewnym stożku pole podstawy, pole powierzchni kuli wpisanej oraz pole powierzchni bocznej (w podanej kolejności) tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej tego stożka do płaszczyzny podstawy.

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mała wskazówka wykona 2 pełne obroty, zaś duża 24, ale w przeciwną stronę. W takim razie, gdy przyjmiemy za punkt odniesienia położenie małej wskazówki, duża wykona 26 obrotów. Zatem nastąpi 26 pokryć.

2. Obie liczby są dodatnie – możemy więc porównać ich kwadraty, czyli liczby $2^{\sqrt{3}}$ oraz $3^{\sqrt{2}}$. Liczba $2^{\sqrt{3}}$ jest większa od 1, więc z nierówności $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ wynika, że $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} < \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$. W takim razie:
$$\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} < \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 2^3 < 3^2 = \left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}},$$
co daje $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

3. Równanie to nie posiada rozwiązań całkowitych. Bez straty ogólności możemy założyć, że $y \geqslant 0$. Wtedy też $y > 2$, czyli $y \geqslant 3$, gdyż y jest liczbą całkowitą. Ponieważ $3^x = (y-2)(y+2) \geqslant 5$, to x jest liczbą całkowitą dodatnią, czyli 3^x jest liczbą naturalną (iloczynem x trójek). Jednak dla dowolnego $y \geqslant 3$, przynajmniej jedna z liczb $y-2$ oraz $y+2$ nie jest podzielna przez 3 (bo różnią się o 4), więc iloczyn $(y-2)(y+2)$ nie może być potęgą trójki.

4. Weźmy dowolny punkt P rozważanej płaszczyzny. Niech $ABCD$ będzie dowolnym kwadratem o środku w punkcie P, zaś punkty K, L, M i N to odpowiednio środki boków AB, BC, CD i DA. Wówczas funkcja f musi spełniać:
$$\begin{gathered} f(A)+f(K)+f(P)+f(N)=0 \\ f(K)+f(B)+f(L)+f(P)=0 \\ f(P)+f(L)+f(C)+f(M)=0 \\ f(N)+f(P)+f(M)+f(D)=0 \\ f(K)+f(L)+f(M)+f(N)=0 \\ f(A)+f(B)+f(C)+f(D)=0 \end{gathered}$$
Dodając cztery pierwsze równości i odejmując ostatnią oraz podwojoną przedostatnią, otrzymujemy warunek $4f(P)=0$, co należało wykazać.

5. Ponieważ $\vec{CA} = [a-2, -4]$ oraz $\vec{CB} = [-1, a-2]$, a pole trójkąta ABC możemy policzyć ze wzoru $P = \frac{1}{2}\left|(-1)\cdot(-4) - (a-2)^2\right|$, to $a = 2$ (jest to jedyne całkowite rozwiązanie tego równania). Zatem $A = (2,1)$, $B = (1,5)$ i $C = (2,5)$, i widzimy, że trójkąt ABC jest prostokątny, więc środek okręgu opisanego ma współrzędne $S = (\frac{3}{2}, 3)$, a promień wynosi $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{17}$. Stąd równanie okręgu ma postać $x^2+y^2-3x-6y+7=0$.

6. Szukamy takich liczb k, że k musi być podzielne przez 5, a $2018 - k$ przez 7. Oznacza to rozwiązanie równania $2018 = 5p + 7r$, gdzie $p, r \in \{0, 1, ..., 2018\}$. Szukamy więc takich wielokrotności liczby 7 (czyli liczb postaci $7r$), które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3 (taką jak liczba 2018). Zauważmy, że liczba postaci $7(5s + q)$ przy dzieleniu przez 5 daje taką samą resztę jak liczba $7q$, co oznacza, że spośród możliwych reszt z dzielenia przez 5, tj. $q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, jedynie $q = 4$ daje, po pomnożeniu przez 7, resztę z dzielenia przez 5 równą 3. Pytamy więc o liczby całkowite postaci $7(5s + 4)$, które są nie mniejsze od 0 i nie większe niż 2018. Liczby te są wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie równym 28 i różnicy równej 35. Ten ciąg ma 57 wyrazów.

   Stąd dokładnie 57 składników jest liczbami wymiernymi.

7. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $R \geqslant r$. Rozważając odległości między punktami styczności okręgów do prostej, otrzymamy

$$\sqrt{(R+d)^2 - (R-d)^2} + \sqrt{(r+d)^2 - (r-d)^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2},$$

   a po redukcji $\sqrt{Rd} + \sqrt{rd} = \sqrt{Rr}$. Zatem $\sqrt{d} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$, co daje $d = \frac{Rr}{R+r+2\sqrt{Rr}}$.

8. Tak, zielonych sztachet jest więcej. Niech N_z oznacza liczbę sztachet zielonych, a N_c – czerwonych. Ponadto, oznaczmy przez l_z sumę odległości sztachet zielonych od prawego skraju płotu, a przez l_c – sumę odległości sztachet czerwonych od lewego skraju.

   Nazwijmy parę sztachet symetryczną, jeżeli jest ona symetryczna względem środka płotu. Będziemy wykonywać następujące dwa rodzaje operacji tak długo jak to możliwe. Pierwsza operacja polega na usunięciu z płotu pary symetrycznej składającej się ze sztachet różnego koloru. Druga operacja to usunięcie dwu par symetrycznych jednokolorowych: jednej pary zielonej i jednej pary czerwonej. Łatwo zauważyć, że każda z tych operacji nie zmienia wartości liczb $N_z - N_c$ oraz $l_z - l_c$. Jeżeli żadna z tych operacji nie jest możliwa do wykonania, to wszystkie sztachety (poza ewentualnie środkową) są jednego koloru. Ponieważ $l_z - l_c > 0$, łatwo wywnioskować, że $N_z - N_c > 0$.

9. Ponieważ dla dowolnej liczby $a > 1$ zachodzi $a + \frac{1}{a} > 2$, to

$$\log_{2016} 2018 + \log_{2018} 2017 > \log_{2017} 2018 + \log_{2018} 2017 = \log_{2017} 2018 + \frac{1}{\log_{2017} 2018} > 2.$$

10. Oznaczmy r – promień podstawy stożka, l – długość jego tworzącej, R – promień kuli wpisanej oraz α – kąt między tworzącą a podstawą. Warunek podany w zadaniu sprowadza się do równości $4\pi R^2 = \frac{\pi r^2 + \pi rl}{2}$, czyli $8R^2 = r^2 + rl$. Wstawiając $R = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ oraz $l = \frac{r}{\cos\alpha}$, otrzymujemy równanie $8 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{\cos\alpha}$. Ponieważ $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, równanie to redukuje się do $8 \cdot \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{\cos\alpha}$, czyli do $9\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0$. Otrzymujemy stąd, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.