POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: szkoła podstawowa

1/8 FINAŁU

1. Niech N będzie najmniejszą liczbą naturalną, której suma cyfr wynosi 2018. Ile wynosi suma cyfr liczby $2018 + N$?

2. W trójkącie równoramiennym ABC boki AB i AC są równej długości. Na boku AB wybrano punkt D tak, że $AD = DC = CB$. Podaj miary kątów trójkąta ABC.

3. Wybieramy jedną przekątną siedmiokąta. W ilu co najwyżej punktach (nie licząc wierzchołków siedmiokąta) mogą ją przeciąć inne przekątne tego siedmiokąta?

4. Jaś mieszka po przeciwnej stronie lasu niż Małgosia i jedyna droga, która prowadzi między ich domami to leśna ścieżka o długości 4,7 km. Dokładnie w połowie tej drogi leży głaz przypominający kształtem duże jajko i przez to zwany przez okolicznych mieszkańców "Smoczym jajem". Dziś rano Jaś wybrał się do Małgosi i szedł z prędkością 38 m/min. W tej samej chwili Małgosia wyruszyła rowerem na spotkanie z Jasiem i jechała z prędkością 56 m/min. W jakiej odległości od "Smoczego jaja" się spotkali?

5. Określ, ile jest różnych ułamków zwykłych, które są równe $\frac{8}{9}$, i których licznik jest liczbą trzycyfrową, zaś mianownik czterocyfrową.

6. Dany jest trójkąt ABC. W którym miejscu na boku AB zaznaczyć punkt M oraz w którym miejscu na boku BC zaznaczyć punkt N, aby trójkąty ANC, ANM i BMN miały równe pola?

7. Jacek ułożył 2018 białych klocków sześciennych w rzędzie. Następnie, zaczynając od pierwszego, przemalował w co trzecim klocku jedną białą ścianę na czerwono, w co piątym jedną białą ścianę na zielono, w co siódmym na żółto, w co dziewiątym na brązowo, w co jedenastym na fioletowo, w co trzynastym na niebiesko. Jakiego koloru były ściany ostatniego klocka?

8. Matylda zjadła $\frac{1}{8}$ czekoladek z bombonierki, a gdy następnie poczęstowała jedną czekoladką Mateusza zauważyła, że w bombonierce jest teraz pięć razy więcej czekoladek niż pustych miejsc po czekoladkach. Wtedy podjęła decyzję: "Na dziś dość już czekoladek. Od jutra będę zjadała po cztery dziennie, bo wtedy akurat ostatnią czekoladkę zjem w niedzielę". W jakim dniu tygodnia Matylda poczęstowała czekoladką Mateusza?

9. Na górnej półce jest o połowę więcej książek niż na środkowej, a na dolnej półce jest o połowę mniej niż na górnej. Ile książek jest na tych trzech półkach razem, jeśli wiadomo, że na środkowej jest o 3 książki więcej niż na dolnej?

10. Zaczynając od pewnej liczby mniejszej od 10 wykonujemy następujące operacje. Liczbę nieparzystą mnożymy przez 2, a parzystą mnożymy przez 2 i dodajemy 1. Czy można w ten sposób otrzymać liczbę 2018?

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła podstawowa

1/8 FINAŁU – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Aby napisać najmniejszą liczbę, której suma cyfr wynosi 2018 powinniśmy zadbać, by było w niej jak najmniej cyfr – a tak będzie wtedy, gdy wykorzystamy jak najwięcej dziewiątek. Jeżeli wykorzystamy 224 dziewiątki, to suma cyfr będzie wynosiła 2016. Musimy więc wykorzystać co najmniej 225 cyfr. Uzyskamy wówczas liczbę
$$2\underbrace{99\ldots99}_{224\text{ razy}}.$$
Liczba ta rzeczywiście jest najmniejsza, bowiem gdybyśmy zastąpili jedną z dziewiątek inną cyfrą, musielibyśmy dwójkę zastąpić czymś większym (ale uwaga: nie oczekujemy, że uczniowie będą to uzasadniać!).

   A co będzie, gdy do tej liczby dodamy 2018? Zauważmy, że $9999 + 2018 = 12017$. Otrzymamy więc liczbę, której zapis dziesiętny składa się z cyfry 3, 220 zer i cyfr 2017 na samym końcu. Suma tych cyfr to $3 + 2 + 1 + 7 = 13$.

2. Niech dany trójkąt ABC ma kąty α, γ, γ. Trójkąt ADC ma kąty przy wierzchołkach A oraz C takie same – oba wynoszą więc α. Z kolei w trójkącie BCD takie same muszą być kąty przy wierzchołkach B oraz D, oba wynoszą więc γ. W takim razie $\gamma = 2\alpha$ (kąt BDC jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC). Ponieważ $\alpha + 2\gamma = 180°$, to $\gamma = 72°$, $\alpha = 36°$.

3. Zauważmy, że dowolna przekątna siedmiokąta dzieli go w taki sposób, że albo po jej jednej stronie zostaje 1 wierzchołek, a po drugiej 4 wierzchołki, albo po jednej stronie są 2 wierzchołki, a po drugiej 3. W pierwszym przypadku maksymalna liczba punktów przecięcia jest równa $1 \cdot 4$, zaś w drugim $2 \cdot 3$. W takim razie punktów przecięcia może być co najwyżej 6.

4. Skoro $38 + 56 = 94$, to Jaś i Małgosia zbliżali się do siebie z prędkością 94 m/min. W takim razie odległość 4700 m pokonali w $4700 : 94 = 50$ minut. W tym czasie Jaś przeszedł $50 \cdot 38 = 1900$ metrów, zatem miejsce spotkania było w odległości $4700 : 2 - 1900 = 450$ m od "Smoczego jaja".

5. Szukamy ułamków postaci $\frac{8\cdot x}{9\cdot x}$, gdzie $100 \leqslant 8 \cdot x < 1000$, zaś $1000 \leqslant 9 \cdot x < 10000$. W takim razie liczba naturalna x spełnia jednocześnie nierówności $12,5 \leqslant x < 125$ oraz $111\frac{1}{9} \leqslant x < 1111\frac{1}{9}$. Zatem $x = 112$ lub $x = 113$ lub ... lub $x = 124$. Razem jest 13 takich liczb.

6. Ponieważ pole trójkąta ANC ma być jedną trzecią pola całego trójkąta, to punkt N musi dzielić bok BC w stosunku $CN : NB = 1 : 2$. Analogicznie rozumując, skoro pole trójkąta ANM ma być połową pola trójkąta ABN, to punkt M musi być środkiem odcinka AB.

7. Zauważmy, że klocek ma ścianę odpowiedniego nie-białego koloru, jeżeli numer jego miejsca w rzędzie podzielony przez odpowiednią liczbę daje resztę 1. Dzielenie liczby 2018 przez liczby 3, 5, 7, 9, 11 i 13 nie daje reszty 1, zatem ostatni klocek jest cały biały.

8. Po poczęstowaniu Mateusza w bombonierce zostało $\frac{5}{6}$ początkowej liczby czekoladek. Czyli $\frac{1}{8}$ wszystkich czekoladek, po dodaniu jednej czekoladki stała się $\frac{1}{6}$ wszystkich czekoladek. Ta jedna czekoladka stanowi więc $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ wszystkich czekoladek. Zatem na początku bombonierka zawierała 24 czekoladki, a po poczęstowaniu Mateusza zostało 20, zatem starczy ich Matyldzie na 5 dni, więc Mateusza poczęstowała we wtorek.

9. Skoro na górnej półce jest półtora raza tyle książek ile na środkowej, zaś na dolnej jest połowa tego, co na górnej, to widzimy, że na dolnej jest $3/4$ tego, co na środkowej. W takim razie $1/4$ liczby książek stojących na środkowej półce wynosi 3. Stąd od dolnej do górnej: $9, 12, 18$. Razem książek jest 39.

10. Zauważmy, że postępując w ten sposób z liczby parzystej zawsze otrzymamy liczbę nieparzystą, zaś z liczby nieparzystej otrzymamy parzystą. Rozwiązując zadanie "od końca" zastanówmy się z jakiej liczby możemy otrzymać 2018. Skoro jest to liczba parzysta, to musiała być otrzymana z liczby nieparzystej przez pomnożenie przez 2: $2018/2 = 1009$. Liczba 1009, jako nieparzysta, musiała być otrzymana z liczby parzystej: $1009 = 2 \cdot 504 + 1$. Liczba 504, jako parzysta musiałaby powstać z liczby nieparzystej, ale niestety, $504 = 2 \cdot 252$. W związku z tym na pewno nie otrzymamy liczby 2018.