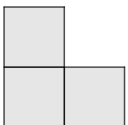


POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

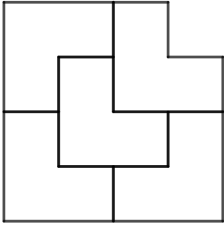
poziom: szkoła podstawowa

ĆWIERĆFINAŁ

- Adam, Beata, Celina i Dominik rozmawiają o tym, co też może być dziś pysznego na podwieczorek. Każde z nich ma swój ulubiony smakołyk spośród następujących czterech: pączek, drożdżówka, budyń, jogurt, ale nikt nie ma takiego samego ulubionego deseru jak inny.
 - Dominik: „Ja nie lubię ani drożdżówek ani jogurtu”;
 - Celina: „Nie lubię ani pączków ani drożdżówek”;
 - Adam: „Lubię budyń”.Jaki jest ulubiony deser każdego z nich?
 - Jeżeli mamy 7 ciastek i chcemy podzielić je pomiędzy 12 osób, to możemy każde ciastko podzielić na 12 części i każdemu wręczyć 7 z uzyskanych fragmentów. Czy można ciastka podzielić tak, by co najwyżej jedno z nich podzielić na 12 lub więcej części, a każde z pozostałych na mniej niż dwanaście części?
 - W trapezie $ABCD$ boki AB oraz CD są równoległe, przy czym bok AB ma długość 3 cm, zaś bok CD długość 2 cm. Na podstawie AB wybrano punkt E w taki sposób, że odcinek CE podzielił trapez na dwie figury: trójkąt i trapez, przy czym pole trójkąta do pola trapezu jest w stosunku 2 : 3. Podaj długość odcinka AE .
 - Rok 2018 rozpoczął się w poniedziałek. W którym roku będzie kolejna taka sytuacja?
 - Dwaj bracia bawili się w osobliwą grę. Na początku wylosowali dwie różne cyfry (żadna z nich nie była zerem) – oznaczmy je symbolami a i b . Następnie rzucali monetą i jeśli wypadł orzeł pisali te cyfry w kolejności ab , zaś jeśli reszka – w kolejności ba . Po zapisaniu w ten sposób 2016 cyfr uzgodnili, że napiszą cyfrę a , a następnie taką cyfrę (niekoniecznie równą a czy b), by powstała 2018-cyfrowa liczba była podzielna przez 9. Ze zdziwieniem odkryli, że ostatnią cyfrę mogą wpisać na dwa różne sposoby. Ile wynosi cyfra a ?
 - Mamy do dyspozycji 5 identycznych klocków. Wszystkie mają kształt przypominający literę L i złożone są z trzech kwadratów o boku długości 1 cm. Klocki układamy obok siebie, tak, że powstaje figura, w której nie ma dziur. Czy możemy uzyskać z tych klocków figurę o obwodzie 16 cm?
- 
- Ile jest liczb mniejszych od 10000 o sumie cyfr nie mniejszej niż 35?
 - Udowodnij, że jeśli P jest punktem wewnętrznym trójkąta ABC , to suma odległości punktu P od wierzchołków A , B , C jest większa od połowy obwodu trójkąta ABC .
 - Jaś zaznaczył na osi liczbowej cztery liczby całkowite: a , b , c oraz d tak, że liczba $c = 1$ znajduje się w połowie pomiędzy liczbami a i b , zaś $d = 4$ znajduje się w połowie między liczbami c i b . W którym miejscu Jaś powinien zaznaczyć liczbę e tak, by liczba b była w połowie drogi między a i e ?
 - Z odcinków o długości 5, $2a + 1$ oraz $a - 1$ zbudowano trójkąt równoramienny. Jakiej długości są te odcinki?

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła podstawowa

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Adam lubi budyni, więc Celina lubi jogurt. Zatem Dominik lubi pączki, a Beata – drożdżówki.
2. Tak. Ponieważ $\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, to sześć ciastek dzielimy na połowy, a tylko jedno ciastko dzielimy na 12 części.
3. Oznaczmy długość odcinka AE przez x . Trójkąt BEC ma taką samą wysokość jak trapez - oznaczmy tę wysokość przez h . Wówczas pola odpowiednich figur wynoszą: $\frac{1}{2}(3-x)h$ oraz $\frac{1}{2}(x+2)h$. Po napisaniu danej w zadaniu proporcji dla pól $\frac{1}{2}(3-x)h : \frac{1}{2}(x+2)h$ otrzymujemy $9 - 3x = 2x + 4$, co daje $x = 1$. W takim razie, długość odcinka AE wynosi 1 cm.
4. Ponieważ rok 2018 jest rokiem zwykłym, to zakończy się tego samego dnia tygodnia, w jakim się rozpoczął. W takim razie rok 2019 rozpocznie się we wtorek, a rok 2020 – w środę. Jednak rok 2020 jest rokiem przestępnym, czyli zakończy się o jeden dzień później – w czwartek. Z tego powodu, rok 2021 rozpocznie się dopiero w piątek, rok 2022 – w sobotę, a rok 2023 – w niedzielę. Oznacza to, że kolejny rok – rok 2024 – rozpocznie się w poniedziałek.
5. Zauważmy, że wśród wypisanych 2016 cyfr jest dokładnie 1008 cyfr a i 1008 cyfr b . Ponieważ liczba 1008 jest podzielna przez 9, to podzielność rozważanej liczby 2018-cyfrowej przez 9 jest równoważna z podzielnością przez 9 sumy $a+x$, gdzie x oznacza ostatnią dopisaną cyfrę. Skoro istnieją dwie różne cyfry $x_1 < x_2$, dla których zarówno $a+x_1$ oraz $a+x_2$ są podzielne przez 9, to $(a+x_2) - (a+x_1) = x_2 - x_1$ też musi być wielokrotnością 9. Jednak, skoro x_1 i x_2 są z zakresu $0, 1, \dots, 9$, to $x_2 = 9$ i $x_1 = 0$. W takim razie $a = 9$.
6. Tak. Przykładowe rozwiązanie pokazane jest na rysunku.
7. Wszystkie te liczby muszą być czterocyfrowe i na trzech miejscach mieć dziewiątki, zaś na czwartym miejscu cyfrę 8 lub 9. Stąd jest ich 5.
8. Punkty A , B i P są wierzchołkami trójkąta, gdyż punkt P nie należy do odcinka AB , a z warunku trójkąta wynika, że $AP + PB > AB$. Podobnie, $BP + PC > BC$ oraz $CP + PA > CA$. Dodając otrzymane nierówności stronami otrzymujemy $2(AP + BP + CP) > AB + BC + CA$, co należało wykazać.
9. Skoro $d = 4$ jest w połowie pomiędzy liczbami $c = 1$ i b , to $b = 7$. Jeśli $c = 1$ jest w połowie pomiędzy a i $b = 7$, to $a = -5$. W takim razie $e = 19$.
10. Rozważymy trzy przypadki. W pierwszym założymy, że $5 = 2a + 1$. Wtedy $a = 2$ i długości boków wynoszą wtedy 5, 5 i 2. Liczby te spełniają warunek trójkąta, więc taki trójkąt istnieje. W drugim przypadku założymy, że $5 = a - 1$. Wtedy $a = 6$ i długości boków miałyby wynosić 5, 13 i 5, co nie jest możliwe. W trzecim przypadku zakładamy, że $2a + 1 = a - 1$, ale wtedy $a = -2$, co nie jest możliwe, gdyż wtedy długości dwóch boków byłyby liczbami ujemnymi. Ostatecznie otrzymujemy tylko jedno rozwiązanie: długości boków wynoszą 5, 5 i 2.