POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Dzieci pana Wergiliusza znalazły torbę cukierków. Szybko policzyły, że jeśli każdego dnia, każde z nich zje ich tyle samo, to cukierków starczy na 7 dni – i nic nie zostanie. Zanim jednak poważnie zajęły się cukierkami interweniowali oboje rodzice żądając równego udziału w cukierkowym skarbie. Niestety, wtedy okazało się, że cukierków starczy tylko na 6 dni. Ile dzieci miał pan Wergiliusz?

2. Tomek bawił się maszynką do robienia kostek lodu. Z maszynki wylatywała co minutę jedna kostka i topiła się przez 3 minuty. Przez ile minut Tomek widział jednocześnie 3 kostki lodu, jeśli w czasie jego zabawy z maszynki wyleciało 20 kostek?

3. Z 27 jednakowych, czerwonych, sześcianików zbudowano większy sześcian. Następnie jego dwie przeciwległe ściany pomalowano na niebiesko, zaś cztery pozostałe ściany na zielono. Po rozłożeniu sześcianu na 27 małych kostek policzono te, które miały ściany dokładnie dwóch różnych kolorów. Ile ich było?

4. Traktor zjeżdżał stromym zjazdem o długości 1 km. Jego przednie koła cały czas kręciły się (bez poślizgu). Tylne koła miały promień 4 razy większy od przednich i blokowały się w czasie hamowania, czego przednie nie robiły. Ile obrotów wykonało każde z kół traktora, jeżeli traktorzysta hamował przez $\frac{1}{5}$ zjazdu, a przednie koła miały obwód 1 m?

5. W trzech zbiornikach było razem 1260 litrów benzyny. Po przelaniu 380 l z pierwszego zbiornika do drugiego, potem 260 l z drugiego do trzeciego, a następnie 300 l z trzeciego do pierwszego, we wszystkich zbiornikach była taka sama ilość benzyny. Ile benzyny było w każdym zbiorniku na początku?

6. W łazience, w której podłoga jest kwadratem o wymiarach $2\text{m} \times 2\text{m}$ leży 50 płytek o wymiarach $10\text{cm} \times 30\text{cm}$. Niektóre płytki mogą leżeć (częściowo, lub w całości) na innych płytkach – w żadnym jednak miejscu grubość takiej warstwy nie przekroczy grubości dwóch płytek. Dokładnie 3/10 powierzchni płytek jest przykrytych przez inne płytki. Jaka jest powierzchnia nieprzykrytej części podłogi łazienki?

7. Ile stopni ma kąt między wskazówkami zegara o godzinie 11.20?

8. Przedstaw liczbę 198 w postaci sumy trzech liczb, z których pierwsza jest trzy razy większa od drugiej, a druga jest dwa razy mniejsza od trzeciej.

9. Spośród wszystkich liczb naturalnych, których suma cyfr wynosi 7 znajdź te (bo jest ich więcej niż jedna!), dla których iloczyn cyfr jest największy z możliwych.

10. W liczbie 136 351 207 531 460 zmieniono dwie cyfry tak, że teraz cyfra dziesiątek bilionów jest dwa razy większa niż cyfra dziesiątek miliardów. Co więcej nowa liczba jest podzielna przez 9. Podaj nową liczbę.

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech n oznacza liczbę dzieci. Wówczas całkowita liczba cukierków to z jednej strony $7n$ razy porcja cukierków przypadająca jednej osobie na jeden dzień, z drugiej strony $6(n+2)$ razy porcja cukierków przypadająca jednej osobie na jeden dzień. Zatem $7n = 6(n+2)$, czyli $n = 12$.

2. Zauważmy, że trzy kostki lodu po raz pierwszy pojawią się w trzeciej minucie (będzie wtedy pierwsza, druga i trzecia kostka). W każdej następnej minucie aż do minuty 20 włącznie będą trzy kostki (w minucie n kostki o numerach $n-2$, $n-1$ i n). W minucie 21 będą już tylko dwie kostki (o numerach 19 i 20), następnie jedna i zero kostek. Zatem trzy kostki są jednocześnie widoczne przez 18 minut (od trzeciej do dwudziestej minuty).

3. Ustawiamy sześcian na niebieskiej ścianie. Wtedy w dolnej podstawie sześcianu tylko środkowy jest dwukolorowy (pozostałe 8 jest trójkolorowych). W środkowej warstwie mamy 8 dwukolorowych i środkowy, który jest jednokolorowy. W górnej warstwie (podobnie jak w dolnej) tylko jeden jest dwukolorowy. W sumie jest $1 + 8 + 1 = 10$ dwukolorowych sześcianików.

4. Oczywiście każde z przednich kół wykonało 1000 obrotów. Natomiast tylne obracały się na drodze 800 m i miały obwód 4 m, zatem każde z nich obróciło się 200 razy.

5. Na końcu w każdym zbiorniku było po $1260 : 3 = 420$ litrów benzyny. W czasie przelewania najpierw odlano z pierwszego zbiornika 380 litrów, ale potem dolano do niego 300 litrów, z czego wynika, że końcowa zawartość pierwszego zbiornika jest o 80 litrów mniejsza od początkowej. Oznacza to, że na początku było w nim $420 + 80 = 500$ litrów benzyny. Rozumując podobnie widzimy, że na początku w drugim zbiorniku było o 120 litrów mniej niż na końcu (czyli 300 litrów), a w trzecim zbiorniku było na początku o 40 litrów więcej niż na końcu (czyli 460 litrów).

6. Powierzchnia wszystkich płytek wynosi $50 \cdot 10 \cdot 30 = 15000\text{cm}^2$. Powierzchnia łazienki to $200 \cdot 200 = 40000\text{cm}^2$. Przykryta powierzchnia płytek wynosi $\frac{3}{10} \cdot 15000 = 4500$. Zatem łączna powierzchnia płytek leżących bezpośrednio na podłodze wynosi $15000 - 4500 = 10500\text{cm}^2$, czyli nieprzykryte jest $40000 - 10500 = 29500\text{cm}^2$ podłogi.

7. O godzinie 11.00 kąt pomiędzy wskazówkami zegara wynosi $30°$. Do godziny 11.20 wskazówka minutowa zakreśli kąt $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$. A wskazówka godzinowa kąt $\frac{1}{3} \cdot 30° = 10°$. Zatem kąt pomiędzy wskazówkami zegara o godzinie 11.20 wynosi: $120° + (30° - 10°) = 140°$.

8. Jeśli drugą liczbę oznaczymy przez x, to pierwsza jest równa $3x$, zaś trzecia $2x$. Jeśli liczbę 198 podzielimy na 6 równych części, to uzyskamy $x = 33$. Stąd szukane liczby to 99, 33, 66.

9. Oczywiście w zapisie dziesiętnym szukanych liczb nie może wystąpić 0 (wtedy iloczyn cyfr będzie równy 0 i na pewno nie będzie największy). Jeżeli wystąpi 6, to największy iloczyn będzie dla liczby zawierającej 1 oraz 6 i wyniesie 6. Jeśli wystąpi 5, to największy iloczyn będzie, gdy jedyną cyfra oprócz 5 będzie 2. Wtedy iloczyn wyniesie 10. Interesują nas więc jedynie iloczyny większe od 10. Takie będą gdy weźmiemy cyfry $2, 2, 3$ bądź $3, 4$. Gdybyśmy mieli 4, ale bez cyfry 3, to jedyna cyfra różna od 1, którą możemy wziąć to 2, a wówczas iloczyn wyniesie tylko 8. Podobnie jeśli największą cyfrą będzie 3, to nie możemy wykorzystać więcej niż dwie cyfry 2 lub jedną cyfrę 3. Liczby dające największy iloczyn cyfr to: 43, 34, 322, 232 oraz 223. Za brak w odpowiedzi wariantów różniących się kolejnością cyfr odejmujemy 2 punkty.

10. Cyfra dziesiątek bilionów to 3 a dziesiątek miliardów to 5. Cyfra 3 nie jest liczbą parzystą, więc nie jest dwa razy większa od żadnej innej cyfry, czyli musi być wymieniona. Cyfra miliardów 5 jest dwa razy mniejsza od 10, ale 10 nie jest cyfrą, więc 5 też musi być wymieniona. Suma cyfr liczby 136 351 207 531 460 bez cyfr 3 i 5 wynosi 39. Zatem suma cyfr liczby 136 351 207 531 460 z wymiennymi cyframi 3 i 5 może wynosić od 39 do 57 (57=39+9+9). Pomiędzy 39 a 57 jedynymi liczbami podzielnymi przez 9 są 45 i 54. Gdyby suma cyfr wynosiła 45 to suma zmienionych cyfr wynosiłaby 6. Skoro cyfra dziesiątek biliardów jest dwa razy większa od cyfry dziesiątek miliardów, więc jedyną możliwością w tym przypadku są cyfry 4 i 2, co daje liczbę 146 321 207 531 460. Gdyby suma cyfr wynosiła 54 to suma zmienionych cyfr wynosiłaby 15. Skoro jedna z cyfr ma być 2 razy większa od drugiej oznaczałoby to, że szukanymi cyframi są 10 i 5. Ale 10 nie jest cyfrą. Zatem jedynym rozwiązaniem jest 146 321 207 531 460.