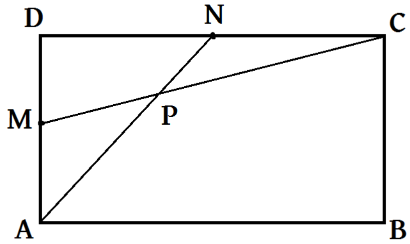
POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

poziom: szkoły podstawowe

FINAŁ

1. Na rysunku obok przedstawiono prostokąt $ABCD$ oraz punkty M, N – środki jego dwóch boków. Wykaż, że kąty $\measuredangle MBN$ i $\measuredangle NPC$ są równe.

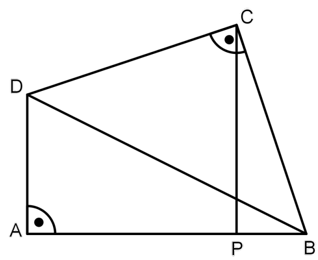


2. Symbolem $n!$ oznaczamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n włącznie (czyli $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$). Wyznacz największą naturalną potęgę liczby 91, przez którą dzieli się liczba 91!.

3. W klasie 6a nauczycielka sprawdziła, kto przeczytał zadaną lekturę. Okazało się, że liczba dziewczynek, które przeczytały lekturę jest równa liczbie chłopców, którzy jej nie przeczytali. Czy w tej klasie jest więcej chłopców, czy osób, które przeczytały lekturę?

4. Albert zaczął wypisywać jedna za drugą kolejne liczby naturalne: 123456789101112..., ale po napisaniu 2018-tej cyfry znudził się i zaprzestał tej, niezwykle interesującej, zabawy. Ile razy napisał cyfrę 0?

5. Na rysunku obok widzimy dwa trójkąty prostokątne: ABD i BCD, przy czym trójkąt BCD jest równoramienny. Odcinek CP jest prostopadły do boku AB i ma długość 3 cm. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



6. Z lewej strony pewnej liczby dwucyfrowej dopisano cyfrę 3, dzięki czemu otrzymano liczbę 21 razy większą od wyjściowej. Podaj, jaka to była liczba dwucyfrowa.

7. Czy istnieją takie niezerowe liczby x i y, że wśród następujących czterech liczb: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$ pewne trzy są równe?

8. Podróż wyciągiem krzesełkowym, w którym krzesełka startują co minutę, trwa 20 minut. Ile krzesełek minie turysta wjeżdżający wyciągiem na górę, jeśli pierwsze krzesełko mija przy wsiadaniu, a ostatnie przy wysiadaniu?

9. Zegarek elektroniczny wyświetla godziny i minuty – przy czym zawsze pokazuje 4 cyfry (czyli o godzinie 8 : 57 pokazuje 08 : 57). O godzinie 21 : 10 cztery cyfry na wyświetlaczu spełniają zasadę, że każda kolejna cyfra jest niewiększa od poprzedniej. Ile jest takich wskazań zegara, tzn. spełniających podana zasadę, w ciągu doby?

10. Z miasta A do miasta B prowadzi tylko jedna droga. Adam może ją przebyć jadąc rowerem (cały czas z tą samą prędkością) albo połowę tej drogi przejść piechotą (idąc dwa razy wolniej niż jadąc na rowerze) a drugą połowę przejechać samochodem (jadąc 10 razy szybciej niż na rowerze). Który sposób jest szybszy?

PMM – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła podstawowa

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zauważmy, że trójkąty DMC oraz AMB są przystające (cecha *bkb*). Podobnie przystające są trójkąty ADN oraz BCN. Oznaczmy $\measuredangle DCM = \measuredangle ABM = \alpha$ oraz $\measuredangle DNA = \measuredangle CNB = \beta$. Zauważmy, że wtedy $\measuredangle NBC = 90^\circ - \beta$, co daje $\measuredangle MBN = \beta - \alpha$. Z drugiej strony $\measuredangle ANB = 180^\circ - 2\beta$, czyli z sumy kątów dla trójkąta NPC

$$\measuredangle NPC = 180^\circ - (\alpha + \beta + 180^\circ - 2\beta) = \beta - \alpha.$$

   A to kończy dowód.

2. Przede wszystkim zauważmy, że liczba $91 = 7{\cdot}13$. W liczbie 91! wielokrotności liczby 7 pojawiają się jako czynniki 13 razy (w tym liczba $49 = 7 \cdot 7$), zaś wielokrotności liczby 13 pojawiają się 7 razy. Oznacza to, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 91! występuję 14 razy liczba 7 oraz 7 razy liczba 13. Stąd liczba 91! jest podzielna przez 91^7 ale nie jest już podzielna przez 91^8. Poszukiwaną przez nas największą potęgą jest 7.

3. Wyobraźmy sobie, że wszystkie dziewczynki, które przeczytały lekturę opowiedzą ją tym chłopcom, którzy lektury nie przeczytali – takie dziewczynki można połączyć w pary z odpowiednimi chłopcami (jest ich tyle samo). Tym samym każdy chłopiec albo przeczytał lekturę sam albo usłyszał o niej od dziewczynki – i każdy z nich poznał lekturę z jednego tylko źródła. Stąd chłopców jest dokładnie tyle samo ile osób, które przeczytały lekturę.

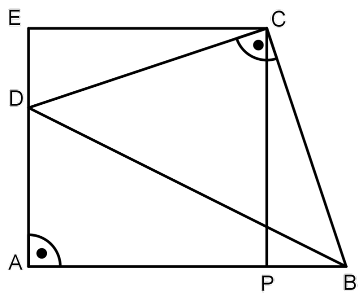
4. Najpierw zastanówmy się na której liczbie skończył Albert. Na pewno nie była to liczba dwucyfrowa, gdyż do wypisania wszystkich liczb jedno- i dwucyfrowych potrzebowałby $9+2\cdot 90 = 189$ cyfr. Przed nim więc do napisania jeszcze $2018 - 189 = 1829$ cyfr. Gdyby to były same liczby trzycyfrowe, to napisałby ich $1829 : 3 = 609\frac{2}{3}$. Wypisał więc liczby trzycyfrowe od 100 do 608 oraz dwie początkowe cyfry liczby 609.

   Policzmy teraz zera: wśród liczb dwucyfrowych mamy 9 zer. Wśród trzycyfrowych – w każdej pełnej setce mamy $2 + 9 + 9 = 20$. Zaś od 600 do liczby 608 mamy 10 zer. I jeszcze jedno na samym końcu (druga cyfra liczby 609) daje nam

$$9 + 5 \cdot 20 + 10 + 1 = 120$$

   zer.

5. Dorysujmy odcinek CE jak na rysunku – jako odcinek równoległy do odcinka AB, gdzie punkt E należy do przedłużenia odcinka AD.



   Zauważmy, że trójkąty DEC oraz CPB są przystające (mają te same kąty oraz przeciwprostokątne tej samej długości). A to oznacza, że $CP = CE = 3$ cm. Zauważmy, że ponieważ trójkąty DEC oraz CPB są przystające, to pole czworokąta $ABCD$ równe jest polu kwadratu $APCE$. Stąd pole to wynosi 9 cm^2.

6. Dopisanie z lewej strony cyfry 3 oznacza, że liczba została powiększona o 300. Musi to być jednak również wielokrotność liczby 21. Wielokrotności liczby 21 pomiędzy 300 a 400 to: $21 \cdot 15 = 315$. $21 \cdot 16 = 336$, $21 \cdot 17 = 357$, $21 \cdot 18 = 378$ oraz $21 \cdot 19 = 399$. Tylko pierwsza z nich spełnia warunki zadania. Poszukiwaną liczbą dwucyfrową jest więc 15.

7. Warto zauważyć, że dla niezerowych liczb nigdy nie będzie $x + y = x - y$. Na pewno więc równe muszą być liczby $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$. Jeżeli liczbę $x \cdot y$ zapiszemy jako ułamek o mianowniku y, to zauważmy, ze musi być $xy^2 = x$, co oznacza, że $y = 1$ bądź $y = -1$. Wtedy x może być dowolną liczbą różną od 0. Jednak gdyby $y = 1$, to ani suma $x + y$ ani różnica $x - y$ nie będzie równała się x dla niezerowego y. Co oznacza, że $y = -1$. Szukamy więc takiej liczby x, że $x - 1 = -x$ lub $x + 1 = -x$. Takie liczby na szczęście istnieją – mamy więc $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$ lub $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$.

8. Wyobraźmy sobie, że w momencie, a którym turysta wsiada na krzesełko robimy zdjęcie całego wyciągu „z lotu ptaka”. Widzimy, że na trasie do góry jest 21 równomiernie rozmieszczonych krzesełek – podobnie na trasie w dół. W punktach wsiadania i wysiadania spotykają się krzesełka jadące w obu kierunkach. Puszczamy teraz maszynę w ruch – krzesełka jadą naprzeciwko siebie i mijać się będą co pół minuty. Stąd podczas 20 minut będzie dokładnie 41 takich „minięć”.

9. Oczywiście jeśli pierwszą wyświetlaną cyfra jest 0, to jedynym układem spełniającym warunki zadania jest 00 : 00. Jeśli pierwszą cyfrą jest 1, to kolejne muszą być nierosnącymi ciągami złożonymi z 1 oraz 0. Mamy więc cztery możliwości 10 : 00, 11 : 00, 11 : 10 oraz 11 : 11. Podobnie z dwójką na początku mamy układy z samymi cyframi 0 i 1 (cztery takie układy), z dokładnie dwoma dwójkami na początku (3 takie układy), z trzema dwójkami na początku (dwa układy) i godzinę 22 : 22. Ostatecznie mamy $1 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ takich wskazań.

10. Pierwszy. Zauważmy, że już po przejściu połowy trasy piechotą Adam straci na to tyle czasu ile na pokonanie całej trasy rowerem. Czas spędzony w samochodzie będzie już czasem, o który drugi sposób jest gorszy niż pierwszy.