

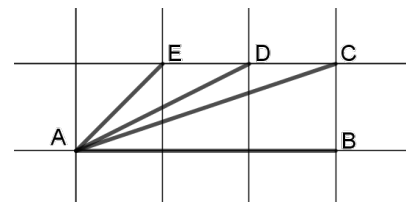
## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA III – rok szkolny 2017/2018

PÓŁFINAŁ poziom: szkoła podstawowa

1. Oblicz, ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 9, których cyfra tysięcy, cyfra setek, cyfra dziesiątek i cyfra jedności to kolejne liczby całkowite (tzn. każda kolejna jest o 1 większa od poprzedniej).
2. Adaś ułożył 2018 kamyków w rzędzie. Zaczynając od pierwszego, zabrał co trzeci kamyk i ułożył w drugim rzędzie. Następnie zabrał co czwarty kamyk z drugiego rzędu i ułożył w pierwszym. Wykonał jeszcze kolejno następujące analogiczne operacje, zawsze zaczynając od pierwszego kamyka: przełożył co piąty kamyk z pierwszego do drugiego rzędu, co szósty z drugiego do pierwszego i co siódmy z pierwszego do drugiego rzędu. Ile jest teraz kamyków w pierwszym rzędzie?
3. Każdy mieszkaniec planety DUDU jest albo prawdomówny (tzn. zawsze mówi prawdę) albo jest kłamcą (tzn. zawsze kłamie). W czasie wywiadu przeprowadzonego z trzema Duduńczykami pierwszy powiedział: "Tylko jeden z nas jest kłamcą". Drugi powiedział: "My wszyscy jesteśmy kłamcami". Czy trzeci z Duduńczyków był kłamcą?

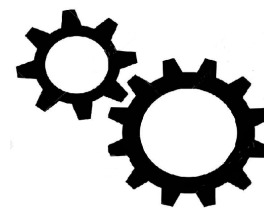
4. Na kartce papieru w kratkę narysowano cztery odcinki:  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  i  $AE$  (rys. obok). Oblicz sumę miar kątów  $\angle BAC$ ,  $\angle BAD$  i  $\angle BAE$ .



5. Achilles goni żółwia, od którego oddalony jest o 100 swoich kroków. Gdy żółw zrobi 2 swoje kroki, Achilles zrobi 11 swoich kroków. Ponadto krok Achillesa jest 2 razy dłuższy od kroku żółwia. Ile kroków zrobi żółw, zanim Achilles zdoła go dogonić?

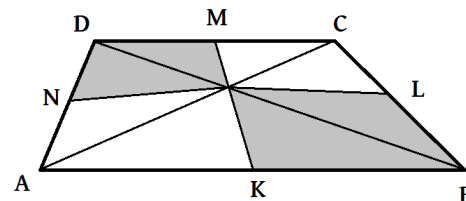
6. Pewne gospodarstwo na mapie w skali 1 : 20000 jest prostokątem o długości 30 mm i szerokości 1,2 cm. Podaj pole powierzchni tego gospodarstwa w hektarach.

7. Na rysunku obok widzimy dwa zazębiające się tryby: pierwszy o 8 zębach, a drugi o 12 zębach. Kiedy pierwszy tryb wykonuje obrót, wymusza również obrót drugiego trybu. Rozważmy przypadek czterech zazębiających się trybów: pierwszy o szesnastu zębami zazębia się z drugim o siedmiu zębami, ten zazębia się z trzecim o dziewięciu zębami, który zazębia się z ostatnim o ośmiu zębami. Ile pełnych obrotów wykona ostatni tryb (czyli obrotów o  $360^\circ$ ), jeżeli pierwszy wykona ich 63?



8. W styczniu Mateusz otrzymał pięć ocen z matematyki, których średnia wynosiła 4,1. W lutym otrzymał tylko dwie oceny, których średnia wynosiła 4. Ile wynosiła średnia ośmiu ocen, które Mateusz otrzymał w marcu, jeśli średnia wszystkich ocen otrzymanych przez Mateusza w pierwszym kwartale tego roku jest równa 4,3?

9. W trapezie  $ABCD$  połączono punkt przecięcia się przekątnych ze środkami wszystkich boków (rysunek obok). Uzasadnij, że pole szarych części jest równe połowie pola trapezu.



10. Rozmawiają Marek i Darek - hodowcy gołębi.

- Marku, w tym roku twoje stado liczy już chyba ponad sto osobników.
- Ależ skąd, Darku! Do setki mi jeszcze trochę brakuje. Ale rzeczywiście, od zeszłego roku moje stadko zwiększyło się o jedną siódmą.
- Jak ty je wszystkie zabierzesz na wystawę?
- Nie zamierzam zabierać wszystkich. Wezmę tylko jedną jedenastą moich gołębi – same najpiękniejsze.

Ile gołębi ma Marek?

## PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Czterocyfrowa końcówka poszukiwanych liczb musi mieć jedną z siedmiu postaci: 0123, 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789. Obliczając sumę cyfr w każdym z przypadków możemy znaleźć pasujące cyfry dziesiątek tysięcy i widzimy, że w każdym z tych przypadków dostajemy tylko jedną możliwość (bo pierwszą cyfrą nie może być zero). W takim razie liczb, o których mowa w zadaniu, jest 7.
2. Wyobraźmy sobie, że grupujemy 2018 kamyków w "paczki" po 3 kamyki. Otrzymamy wtedy 672 pełne paczki oraz kolejną niepełną, składającą się z dwóch kamyków. Ponieważ jednak bierzemy pierwszy kamień z każdej paczki (pełnej lub nie), to weźmiemy 673 kamyki i przełożymy je do drugiego rzędu. Zatem po pierwszej operacji w pierwszym rzędzie zostało  $2018 - 673 = 1345$  kamyków, a w drugim rzędzie były 673 kamyki. Rozumując analogicznie wyliczamy, że podczas drugiej operacji zostało przeniesionych 169 kamyków, czyli w rzędzie pierwszym było  $1345 + 169 = 1514$ , a w drugim  $673 - 169 = 504$  kamyków. W trzeciej operacji zostały przeniesione 303 kamyki (czyli w rzędzie pierwszym było  $1514 - 303 = 1211$ , a w drugim  $504 + 303 = 807$  kamyków), w czwartej operacji zostało przeniesionych 135 kamyków (czyli w rzędzie pierwszym było  $1211 + 135 = 1346$ , a w drugim  $807 - 135 = 672$  kamyki). Wreszcie, w ostatniej operacji, przeniesiono 193 kamyki, czyli w pierwszym rzędzie zostały  $1346 - 193 = 1153$  kamyki.
3. Nie, trzeci z Duduńczyków był prawdomówny. Zauważmy, że żaden prawdomówny Duduńczyk nie może wypowiedzieć zdania "My wszyscy jesteśmy kłamcami", zatem drugi z Duduńczyków był kłamcą, a więc co najmniej jeden z dwóch pozostałych był prawdomówny. W takim razie, jeśli pierwszy z Duduńczyków był kłamcą, to wtedy trzeci musiał być prawdomówny. Jeśli zaś pierwszy z Duduńczyków był prawdomówny, to z jego zdania wynika, że trzeci też.
4. Kąt  $\angle BAE$  ma miarę 45 stopni. Pozostaje znaleźć sumę miar kątów  $\angle BAC$  i  $\angle BAD$ . Oznaczmy przez  $C'$  punkt symetryczny do punktu  $C$  względem prostej  $AB$ . Wtedy suma miar kątów  $\angle BAC$  i  $\angle BAD$  to miara kąta  $\angle C'AD$ . Jednak trójkąt  $AC'D$  jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, z kątem prostym przy wierzchołku  $D$ . W takim razie kąt  $\angle C'AD$  ma miarę 45 stopni, a suma miar kątów  $\angle BAC$ ,  $\angle BAD$  i  $\angle BAE$  to 90 stopni.
5. Gdy Achilles wykona 11 swoich kroków, żółw zrobi 2 swoje kroki (czyli 1 krok Achillesa). W takim razie, Achilles zbliży się do niego o 10 swoich kroków, zatem różnicę 100 kroków pokona po  $10 \cdot 11$  swoich krokach. W tym czasie żółw wykona tylko  $10 \cdot 2 = 20$  swoich kroków.
6. Na mapie gospodarstwo jest prostokątem o wymiarach 3 cm na 1,2 cm. Zatem w rzeczywistości ma wymiary 600 m na 240 m, co daje pole 144000 m<sup>2</sup>. Przeliczając na hektary otrzymujemy 14,4 ha.
7. Wystarczy zauważyć, że iloczyn liczby obrotów i liczby zębów nie zależy od trybu, zatem ostatni tryb wykona  $16 \cdot 63/8 = 126$  obrotów.
8. Oznaczmy średnią ocen uzyskanych przez Mateusza w marcu przez  $x$ . Wtedy suma ocen uzyskanych w styczniu wynosi  $5 \cdot 4,1 = 20,5$ , w lutym  $- 2 \cdot 4 = 8$ , a w marcu  $8x$ . Dodatkowo, wiemy, że w pierwszym kwartale Mateusz otrzymał 15 ocen z matematyki, których suma wynosi  $15 \cdot 4,3 = 64,5$ . Z uzyskanego równania otrzymujemy  $x = 4,5$ .
9. Musimy wykazać, że pole szarych części jest takie samo jak pole białych. Oznaczmy punkt przecięcia się przekątnych przez  $P$ . Widzimy, że trójkąty  $AKP$  i  $KBP$  mają takie same długości podstaw (bo  $K$  jest środkiem odcinka  $AB$ ) oraz taką samą wysokość (gdyż mają wspólny wierzchołek  $P$ ). W takim razie mają równe pola. Podobnie wykazujemy równości dla pozostałych par trójkątów szarych i białych.
10. Oznaczmy obecną liczbę gołębi przez  $n$ . Wiemy, że  $n$  to  $\frac{8}{7}$  liczby zeszłorocznej, zatem  $n$  jest wielokrotnością 8. Z drugiej strony,  $n$  jest podzielne przez 11. Zatem, skoro  $n$  jest mniejsze niż 100, pozostaje nam jedyna możliwość:  $n = 88$ .