MECZ MATEMATYCZNY

VII POLYGON

poziom G

1. Pokazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność
$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geqslant 4.$$

2. Długości przekątnych trapezu to 13 i 15, a wysokość ma długość 5. Obliczyć pole trapezu.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na dwusieczną kąta wewnętrznego CAB. Udowodnić, że proste BE i CD przecinają się w punkcie na dwusiecznej kąta zewnętrznego BAC.

4. Udowodnić, że dla liczb dodatnich x, y, z o iloczynie równym 1 zachodzi nierówność
$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1} \leqslant 1.$$

5. Rozstrzygnąć, czy równanie
$$y^3 - x^2 = 5$$
ma rozwiązanie w liczbach całkowitych.

6. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele nieprzystających trójkątów prostokątnych, których boki mają długości będące liczbami całkowitymi, a długości przyprostokątnych różnią się o 1.

7. Dane są liczby całkowite m, n oraz liczby rzeczywiste dodatnie p, q takie, że $p + q = 1$. Wykazać, że wtedy
$$(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geqslant 1.$$

8. W czworościanie $ABCD$ zachodzi równość $\measuredangle BAC + \measuredangle BAD = 180°$, a AK jest dwusieczną kąta $\measuredangle CAD$. Udowodnić, że $\measuredangle BAK = 90°$.

9. Rozstrzygnąć, czy szachownicę 43×43 z usuniętym środkowym polem można pokryć 308 klockami 6×1.

10. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n $(m \geqslant n)$ zachodzi równość
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m+k}{n}.$$

11. 30 harcerzy ustawia się w losowej kolejności. Jaka jest wartość oczekiwana liczby harcerzy stojących pomiędzy najwyższym i najniższym. Zakładamy, że każdy harcerz jest innego wzrostu.