

MECZ MATEMATYCZNY

VII POLYGON

poziom N

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ ab + 2a + b = 0 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b .

2. W trójkącie ABC oznaczono przez M_1 i M_2 środki boków odpowiednio BC i AC . Wykazać, że odcinki AM_1 i BM_2 przecinają się w punkcie, który dzieli każdy z tych odcinków w stosunku $1 : 2$.
3. Wykazać, że suma dwóch ani trzech kwadratów liczb nieparzystych nie może być kwadratem liczby całkowitej.
4. Z dowolnego punktu A okręgu wychodzą dwie prostopadłe cięciwy AB i AC . Uzasadnić, że BC jest średnicą tego okręgu.
5. Wykazać, że dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + (x^2 + x^4 + x^6 + x^8)\left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right) \geq 10.$$

6. Uzasadnić, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to $n^3 - 3n^2 + 2n$ dzieli się przez 6.
7. Która liczba jest większa

$$3^{3^5} \text{ czy } 5^{5^3} ?$$

Uzasadnić odpowiedź.

8. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, którą można przedstawić dwoma sposobami w postaci sumy siedmiu składników, które są różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi.
9. Test miał 30 pytań. Za każdą dobrą odpowiedź przyznawano 7 punktów, a za złą lub brakującą - odejmowano 12. Ilu dobrych odpowiedzi udzieliła osoba, która uzyskała 77 punktów?
10. Siostra jest o 3 lata młodsza od brata. Brat ma obecnie 2 razy tyle lat, ile miała siostra wtedy, kiedy brat miał tyle lat, ile ma siostra teraz. Ile lat ma siostra, a ile brat?